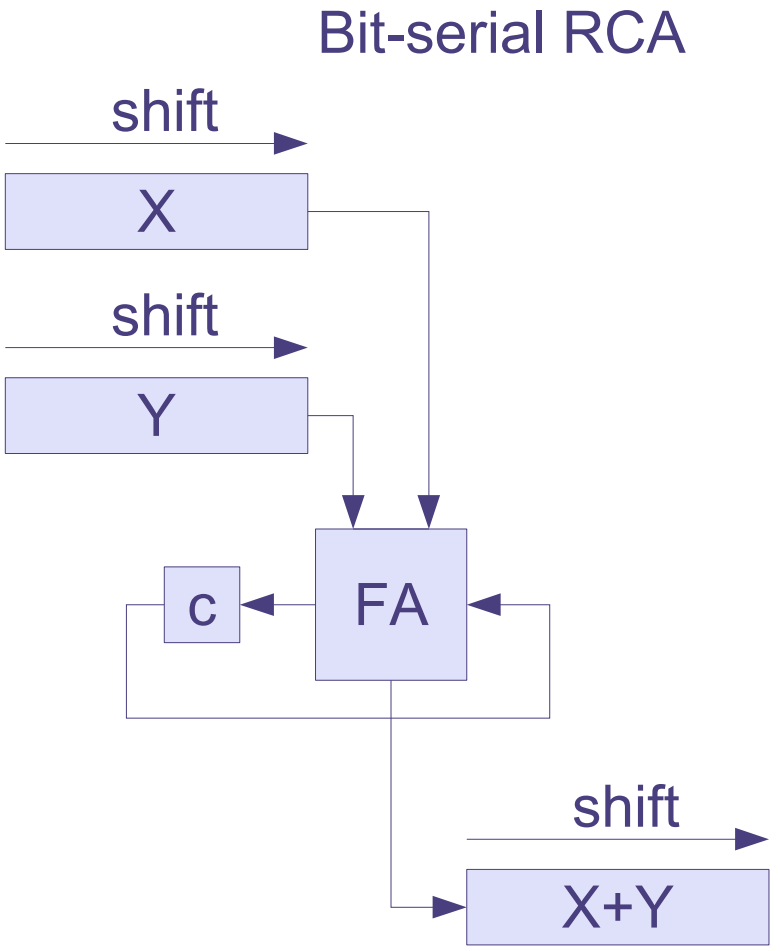
Szybkie układy mnożące

Operacja mnożenia

- Operacje dodawania i mnożenia są podstawą algorytmów obliczania wartości innych złożonych funkcji matematycznych oraz przetwarzania sygnałów
- Implementacje
  - bitowo-szeregowe
  - sekwencyjne dodawanie wieloargumentowe
    - mnożenie przy poszerzonej bazie (*high-radix*)
  - drzewiaste dodawanie wieloragumentowe
    - drzewa (redularne i nieregularne) CSA
  - metoda "dziel i zwyciężaj" (*Divide & Conquer*)

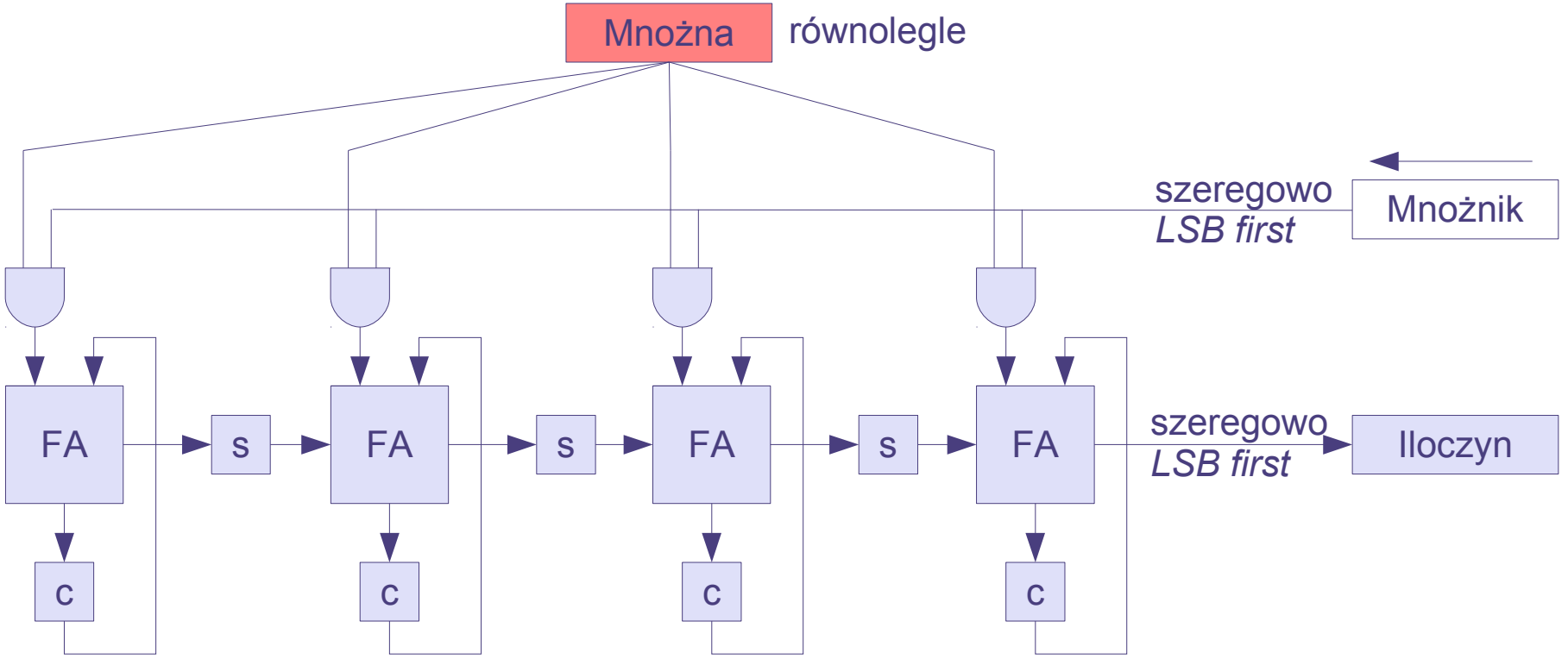
Dodawanie bitowo-szeregowe (RCA)

- Zalety (dla implementacji VLSI)
  - mała liczba wyprowadzeń
  - krótkie połączenia
  - duża szybkość zegara
  - mała powierzchnia
  - niski pobór mocy
- Dobrze nadaje się do przetwarzania potokowego
- Szybkość bez zmian: $\Theta(k)$



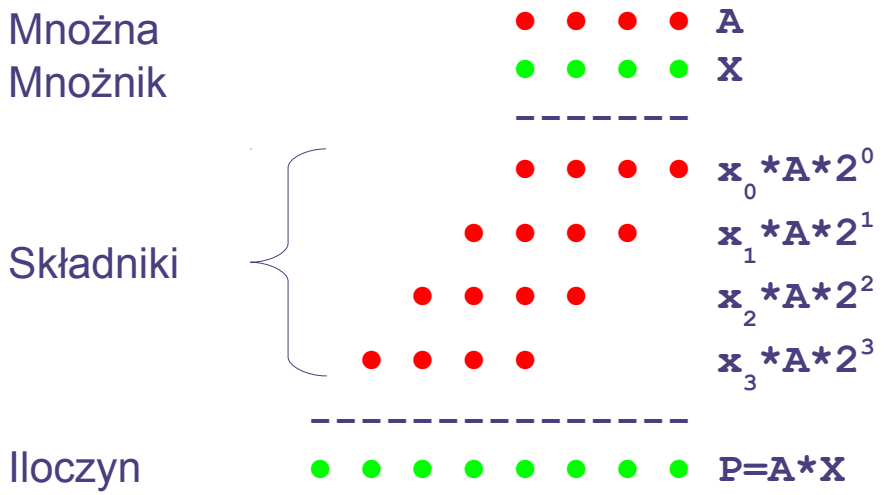
Mnożenie bitowo-szeregowo

- Rozwiązanie częściowo-szeregowe (*semi-serial*)
  - mnożenie liczb 4bitowych (ogólnie k-bitowych)
  - szybkość: 8-cykli (2k cykli – Θ(k))
  - wady: dedykowany sprzęt



Układy mnożące sekwencyjne

- Prosta implementacja sprzętowa i programowa



cyfra dwójkowa [0,1]

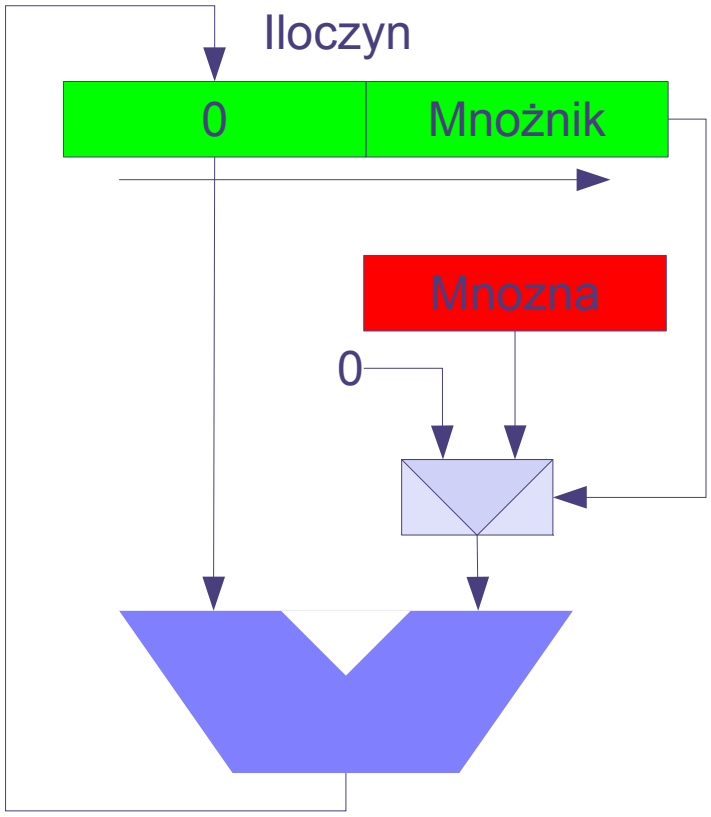
$$P^{i+1} = P^i + x_i*A*2^i$$

sumy częściowe

przesunięcie na i-pozycję

Składniki dodawania są zawsze iloczynem: $A*x_i$ (mnożna * cyfra mnożnika), a przesunięcie zapewnia odpowiednia wagę składnika.

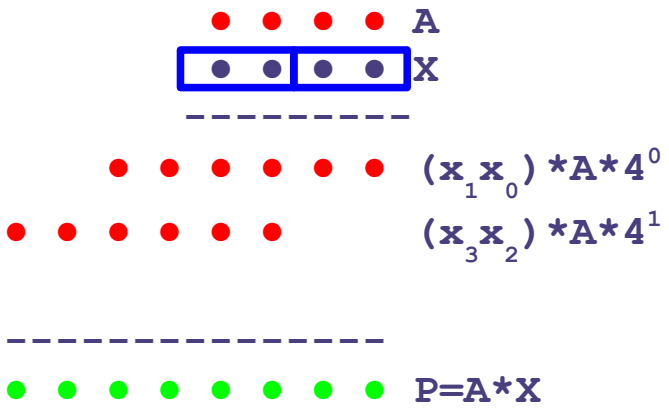
Przy bazie 2 (radix-2) składniki mogą mieć tylko dwie wartości: 0 i A.

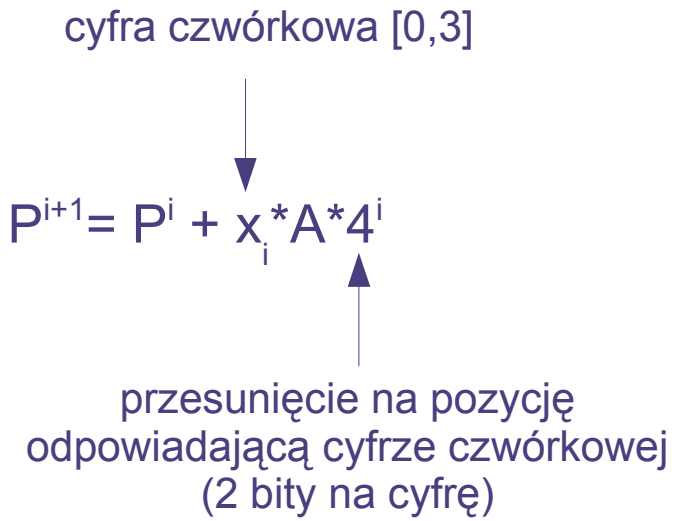


Zamiast przesuwania mnożnej, mozna przesuwać rejest iloczynu i stosować węższy sumator

Mnożenie przy poszerzonej bazie

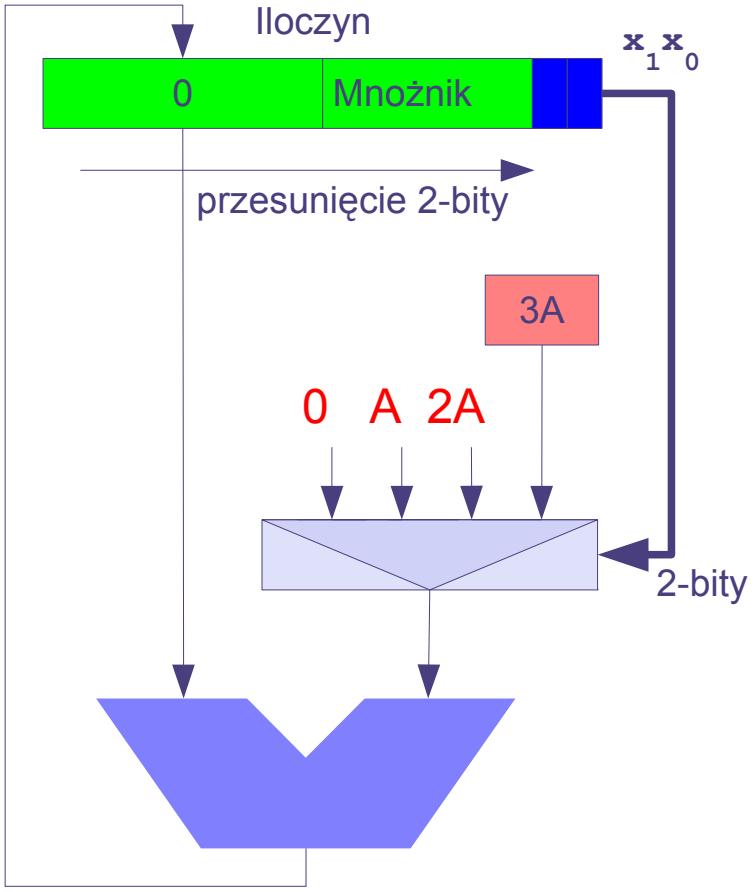
- Redukcja liczby składników dodawania
  - dla radix-4, liczba skladników jest dwa razy mniejsza
  - cyfry radix-4 zajmują dwa bity i mogą wynosić 0,1,2,3
  - składniki dodawania mogą wynosić 0, A, 2A, 3A
  - obliczanie 3A jest kłopotliwe

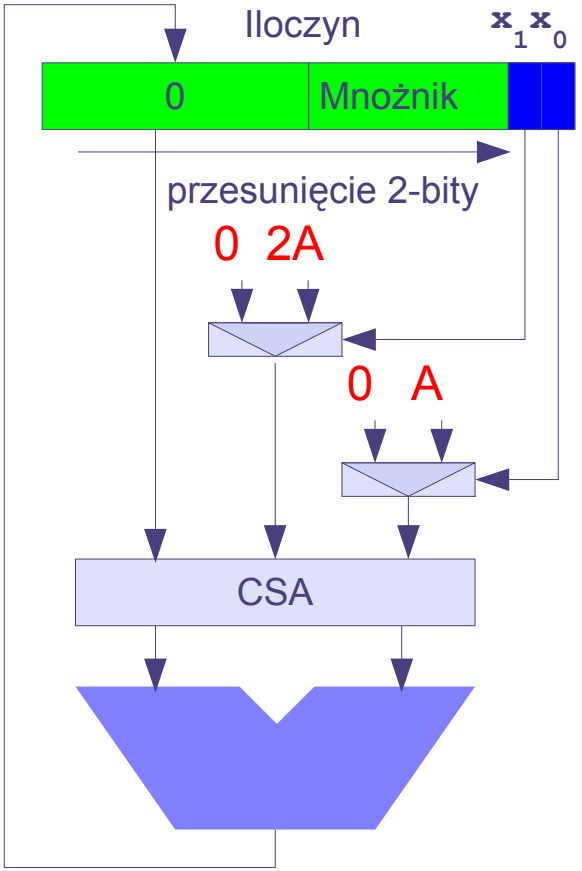




Mnożenie przy poszerzonej bazie

- Nietypowe wartości składników (np. 3A dla radix-4) można obliczać wstępnie lub stosować sumator CSA
- Arytmetyka liczb dodatnich (unsigned)

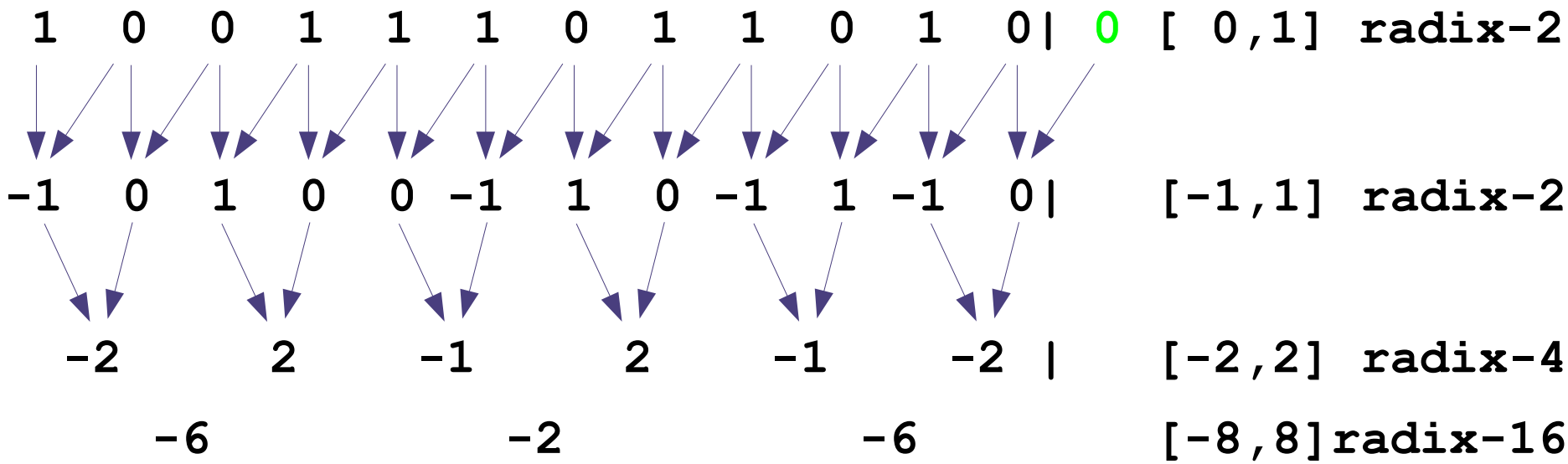




Mnożenie liczb ze znakiem

- Algorytm Booth'a przy poszerzonej bazie
- Konwersja mnożnika [0,1] na [-1,1], [-2,2], [-8,8],...

00,11 – kodowane jako 0
10 – początek bloku jedynek – kodowane jako -1
01 – koniec bloku jedynek – kodowane jako 1

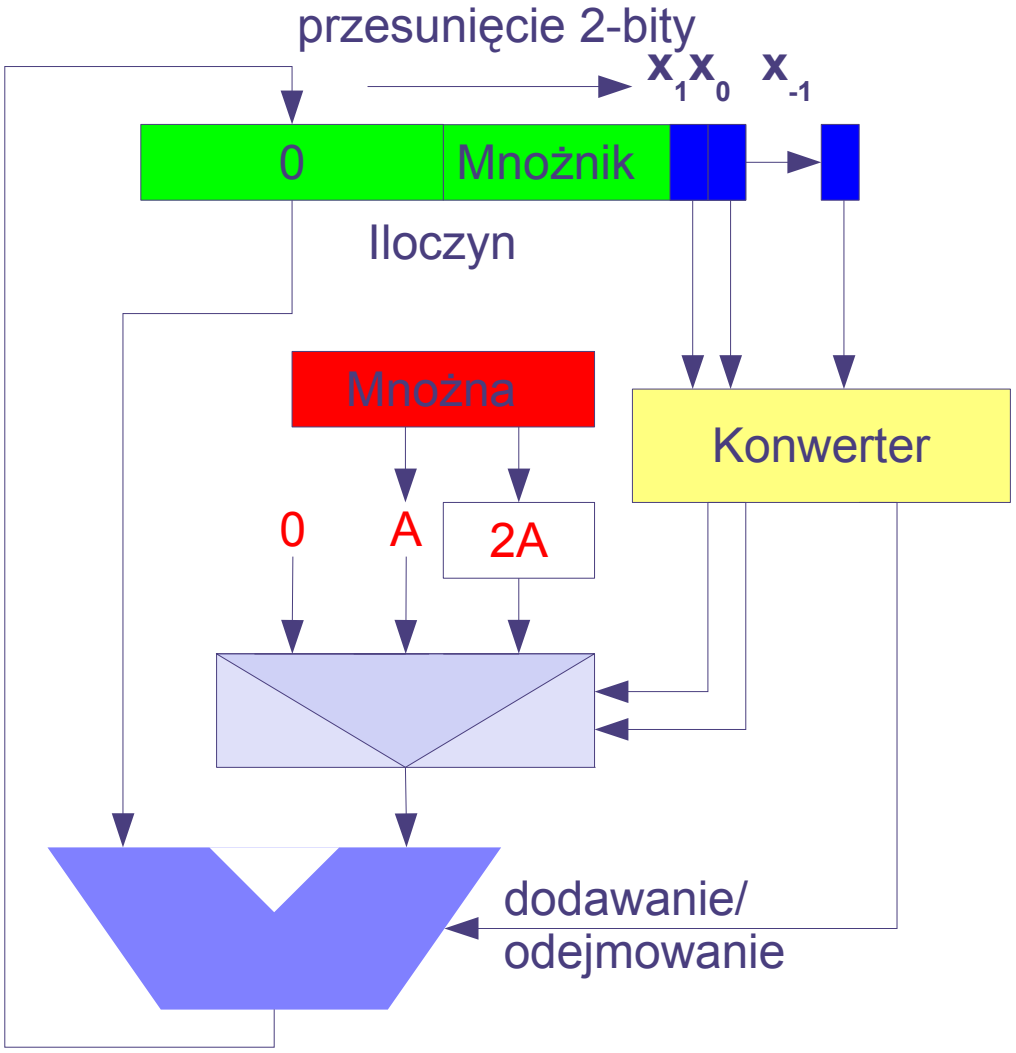


- Konwersja jest szybka (nie ma propagacji)
- Przy wyższych bazach, cyfry mają znak, ale jest ich mniej, co ułatwi obliczanie składników mnożenia

Mnożenie liczb ze znakiem

- Algorytm Booth'a dla radix-4

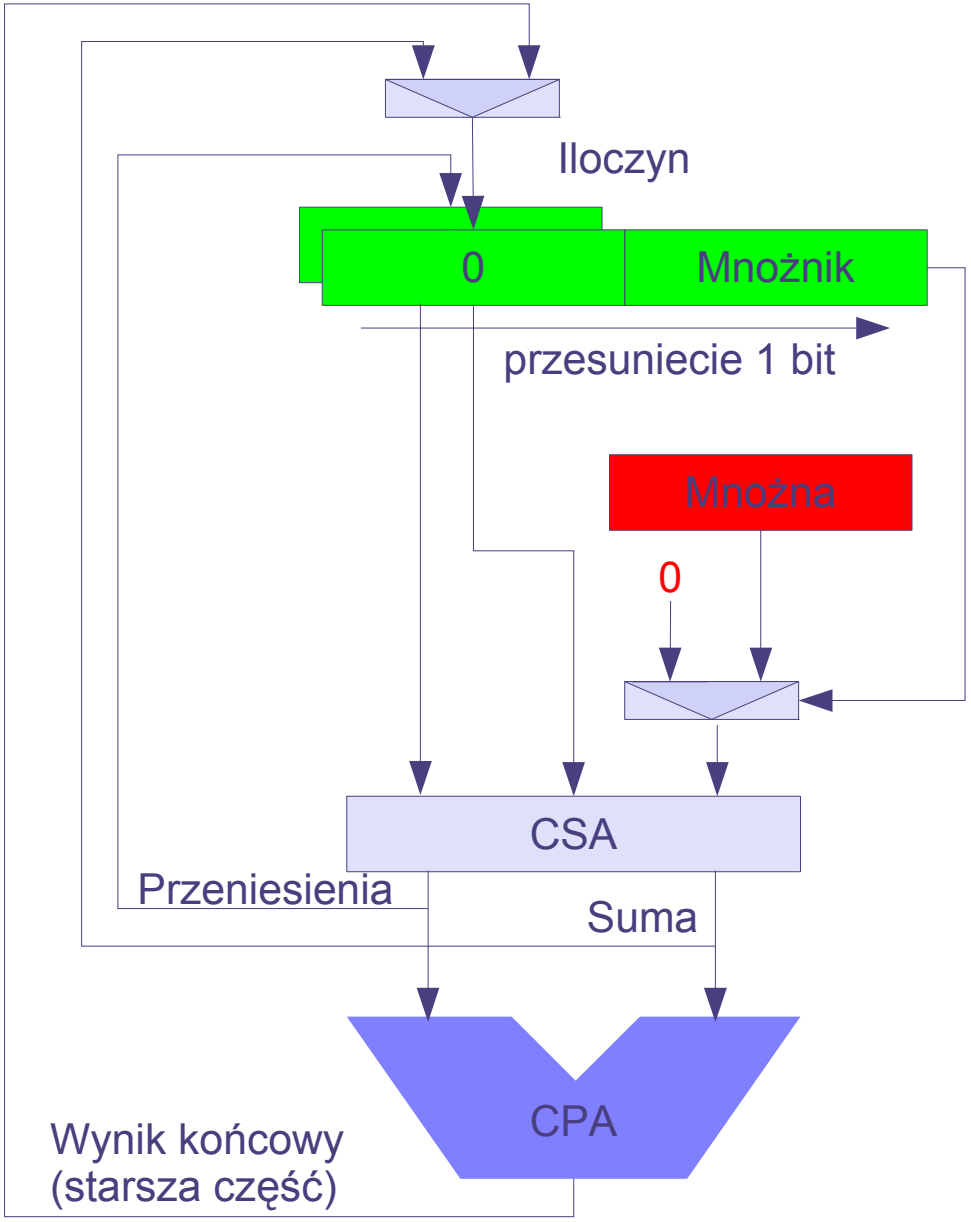
Konwersja dla Radix-4		
radix-2 [0,1]	radix-2 [-1,1]	radix-4 [-2, 2]
000	0 0	0
001	0 1	1
010	1 -1	1
011	1 0	2
100	-1 0	-2
101	-1 1	-1
110	0 -1	-1
111	0 0	0



Przyspieszenie sumowania – CSA

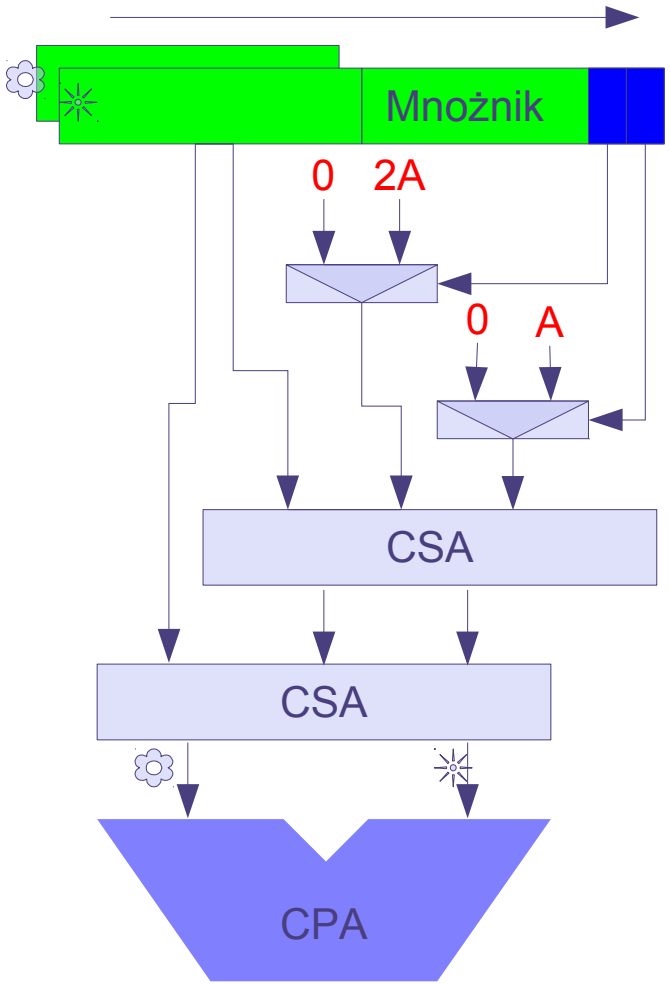
- Dodawanie składników wykonuje CSA – Θ(k)
- Starsza część wyniku to dwie liczby (redund.)
- Sumator CPA potrzebny jest tylko raz – Θ(log k)
- Uwaga na przesuwanie iloczynu !!!
- Sybkość: Θ(k+log k)

Przykład dla radix-2

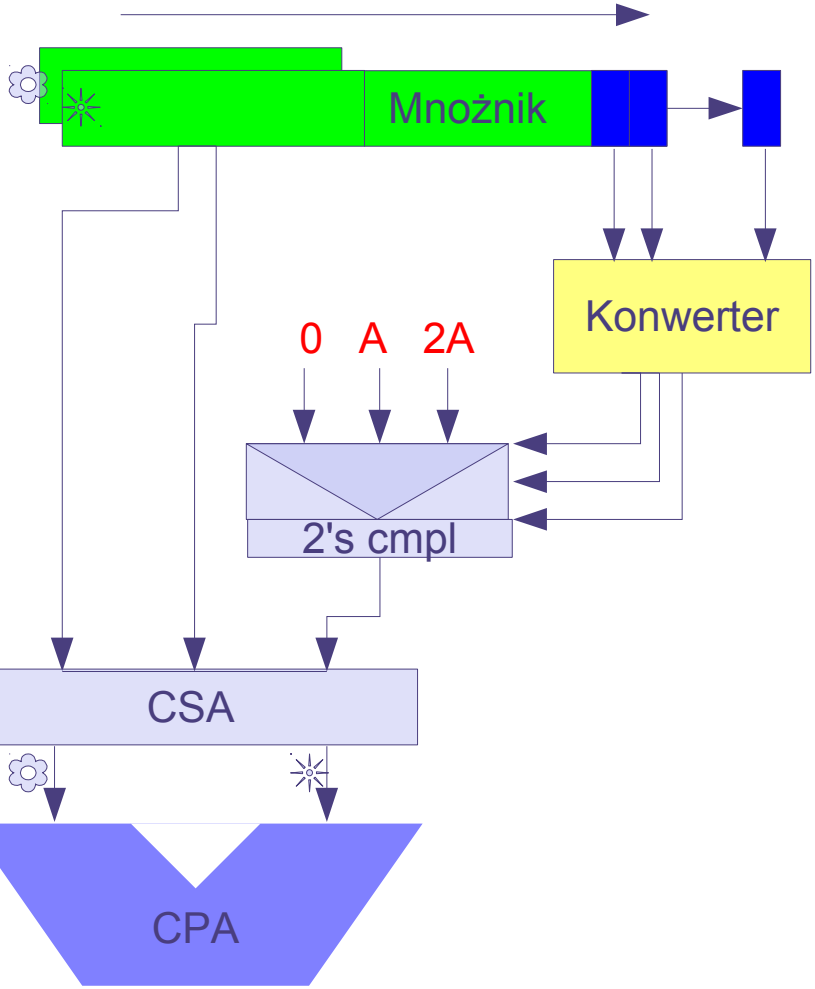


Szybkie układy mnożące sekwencyjne

Artymetyka *unsigned*
(częściowe drzewo CSA)

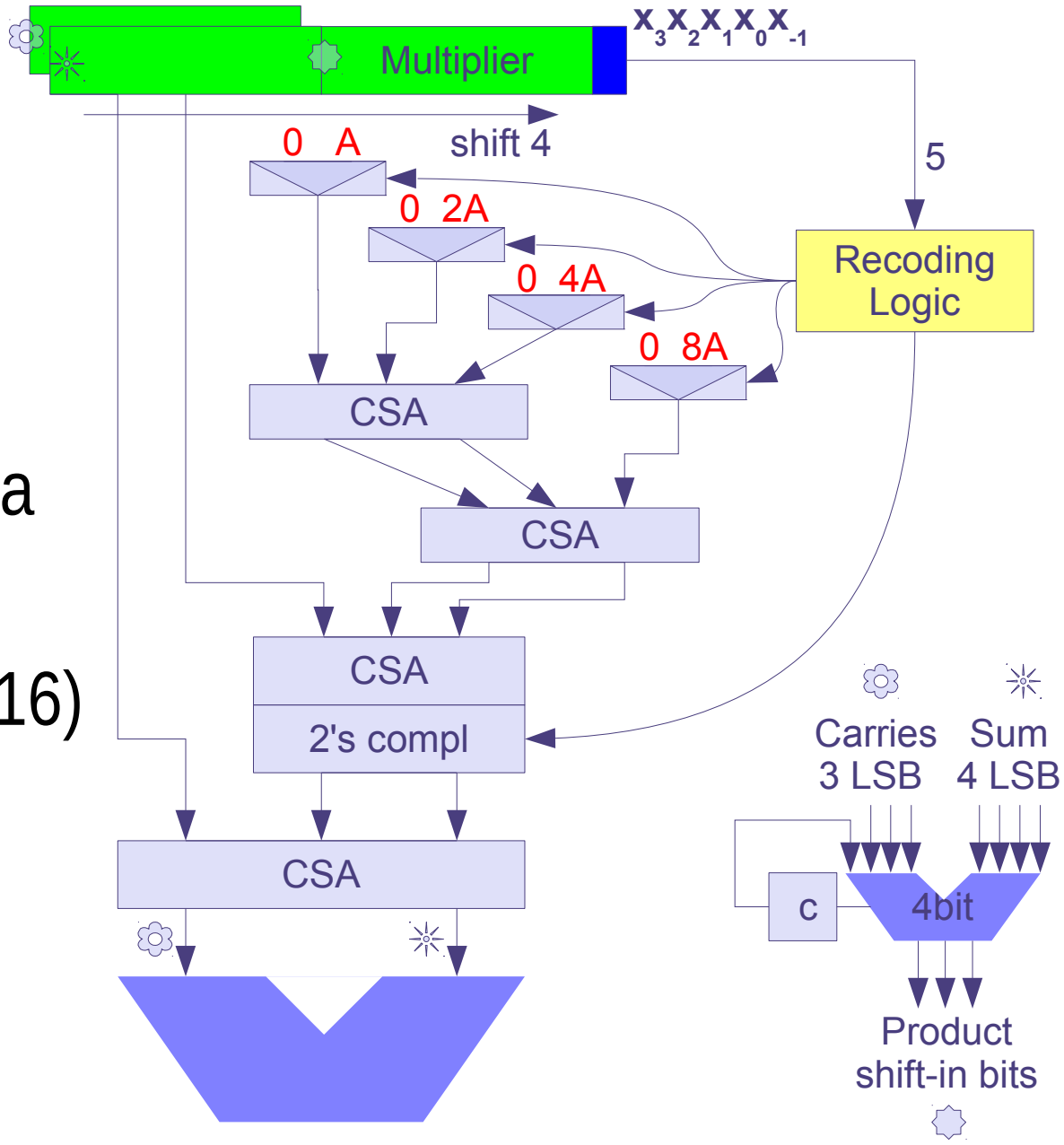


Artymetyka *signed*
(algortm Booth'a)



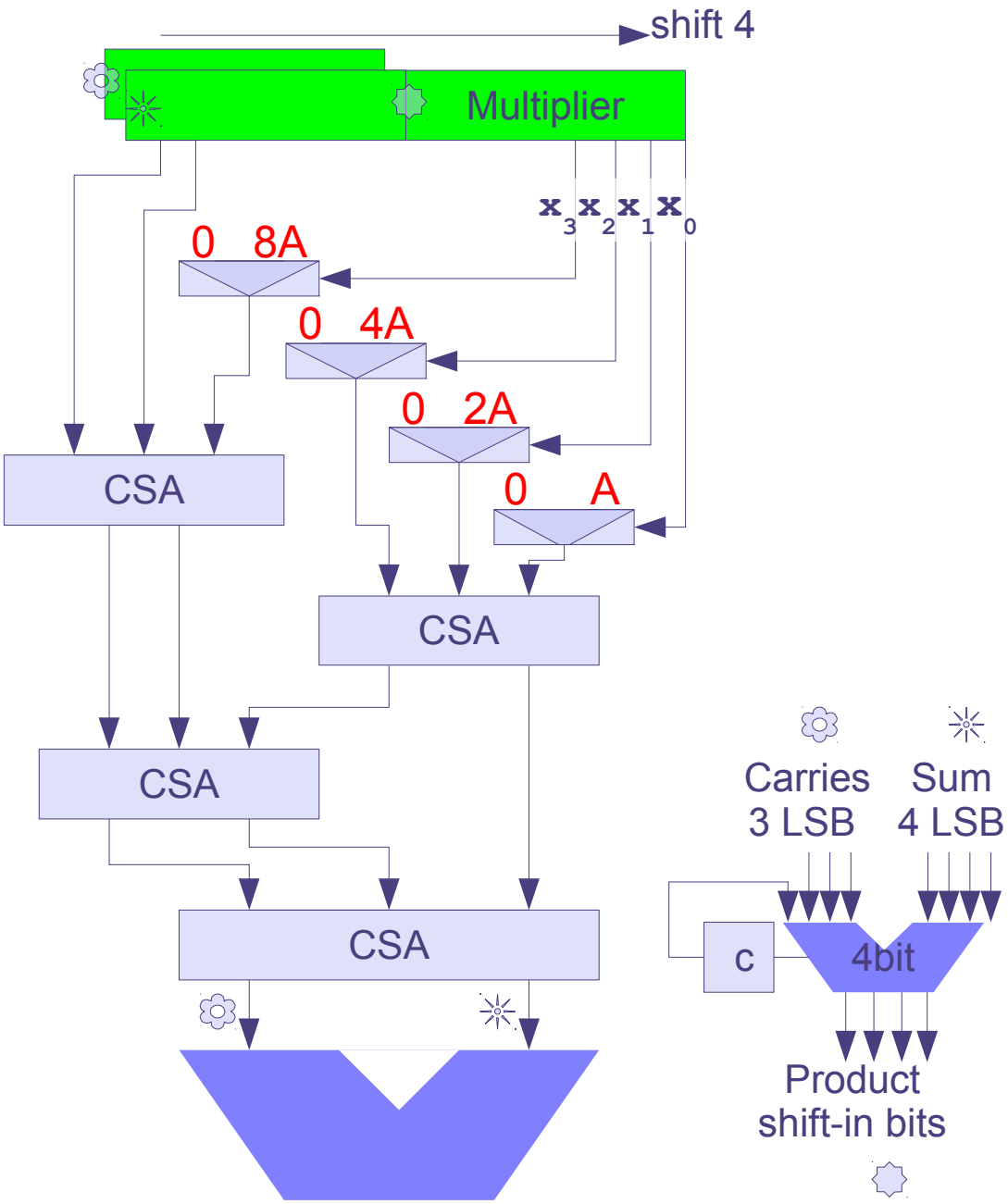
Przykład: Radix-16, signed

- Składniki sumowań 0,±1A,±2A,...,±8A
- Konwersja oparta na 5 bitach mnożnika
- Iloczyn przesuwany o 4 bity (cyfra radix-16)



Przykład: Radix-16, unsigned

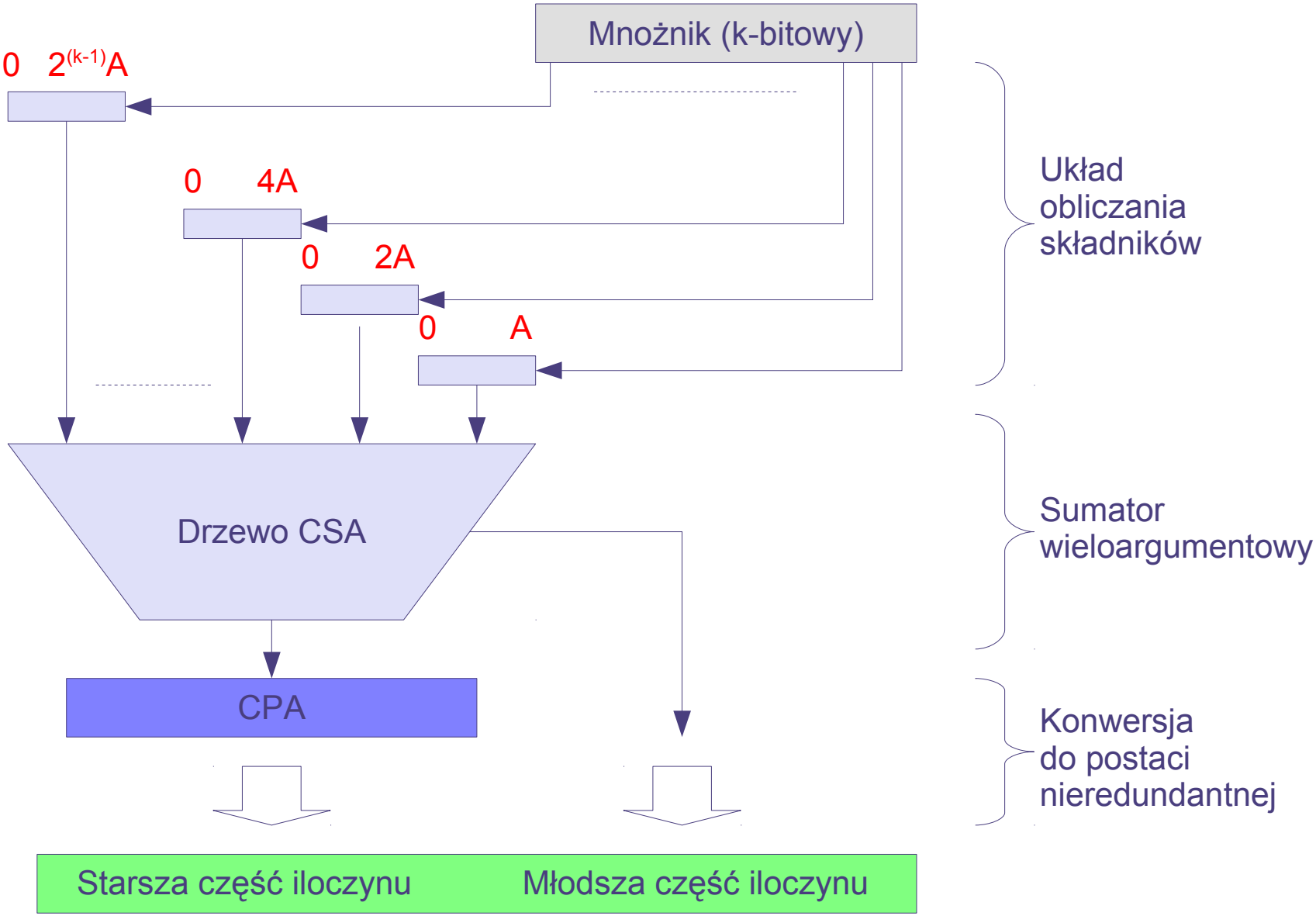
- Składniki sumowań 0,1A, 2A, … 15A
- Obliczanie składników w drzewie CSA
- Iloczyn przesuwany o 4 bity (cyfra radix-16)



Drzewiaste układy mnożące

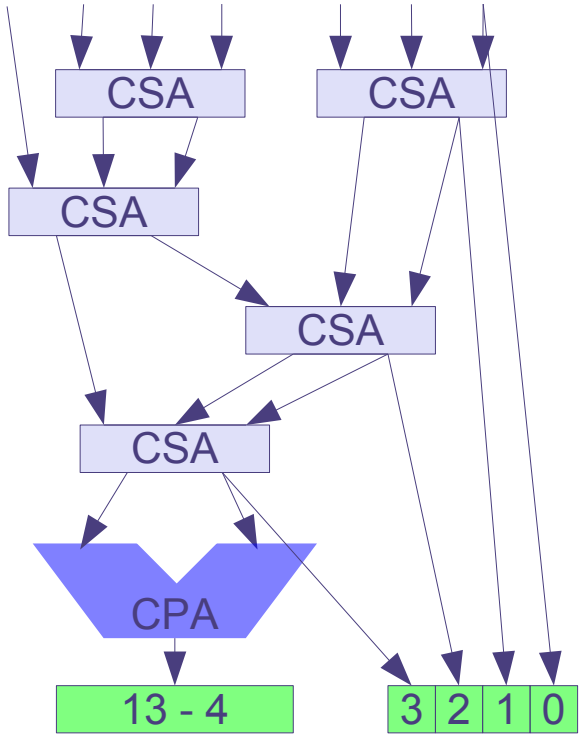
- Wszystkie składniki podawane jednocześnie
- Składniki – wielokrotności mnożnej
- Pełne drzewo redukujące oparte na CSA
- Końcowa konwersja wyniku na CPA
- Struktury regularne i nieregularne
- Szybkość dodawania w drzewie: $\Theta(\log k)$
- Bradzo droga realizacja (rozmiar)

Drzewiaste układy mnożące

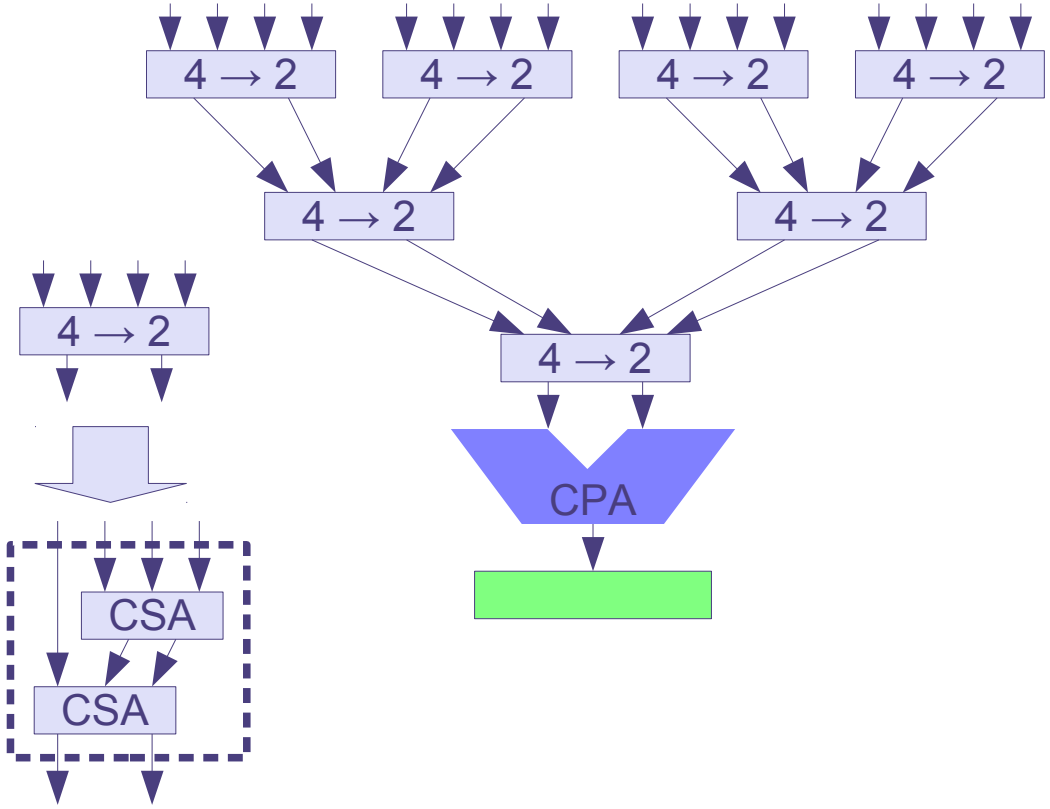


Struktura drzew CSA

Drzewa nieregularne:
np. mnożenie liczb 7-bitowych
(dodawanie 7 składników)

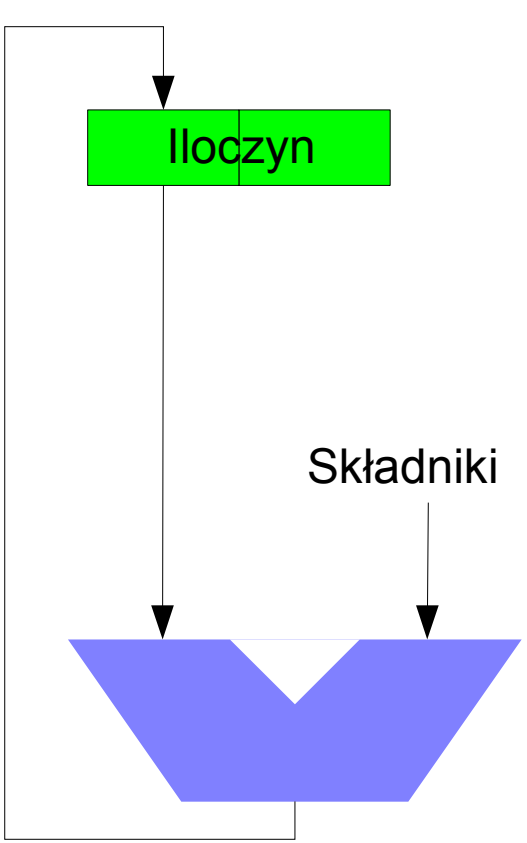


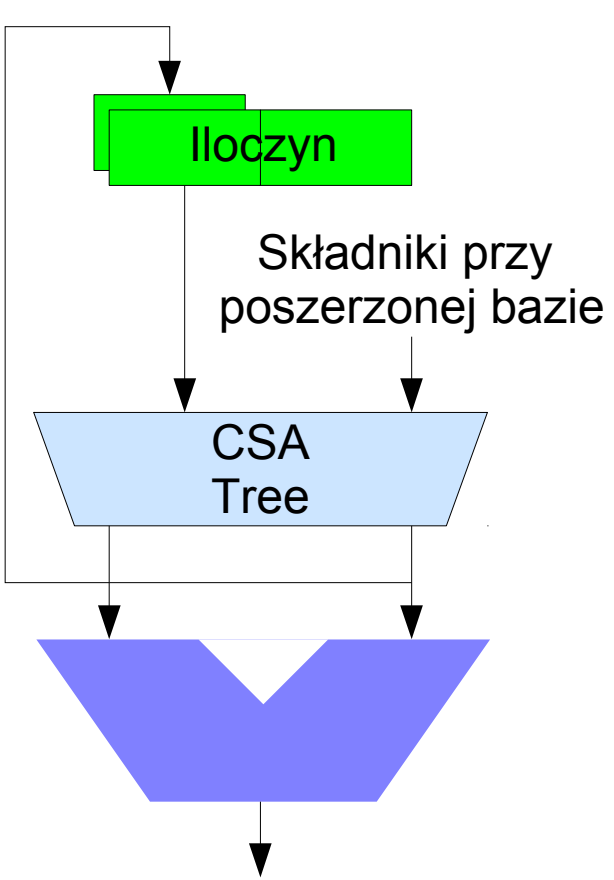
Drzewa regularne:
np. mnożenie liczb 16-bitowych
(dodawanie 16 składników)

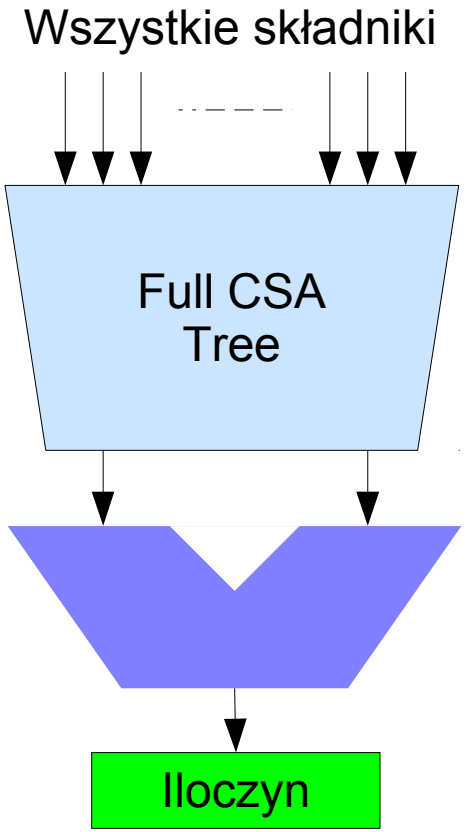


Mnożarki – podsumowanie

Podstawowe sekwencyjne radix-2 → Szybciej → Poszerzona baza i częściowe drzewo (High-radix/Partial Tree) ← Taniej ← Mnożarka z pełnym drzewem redukującym

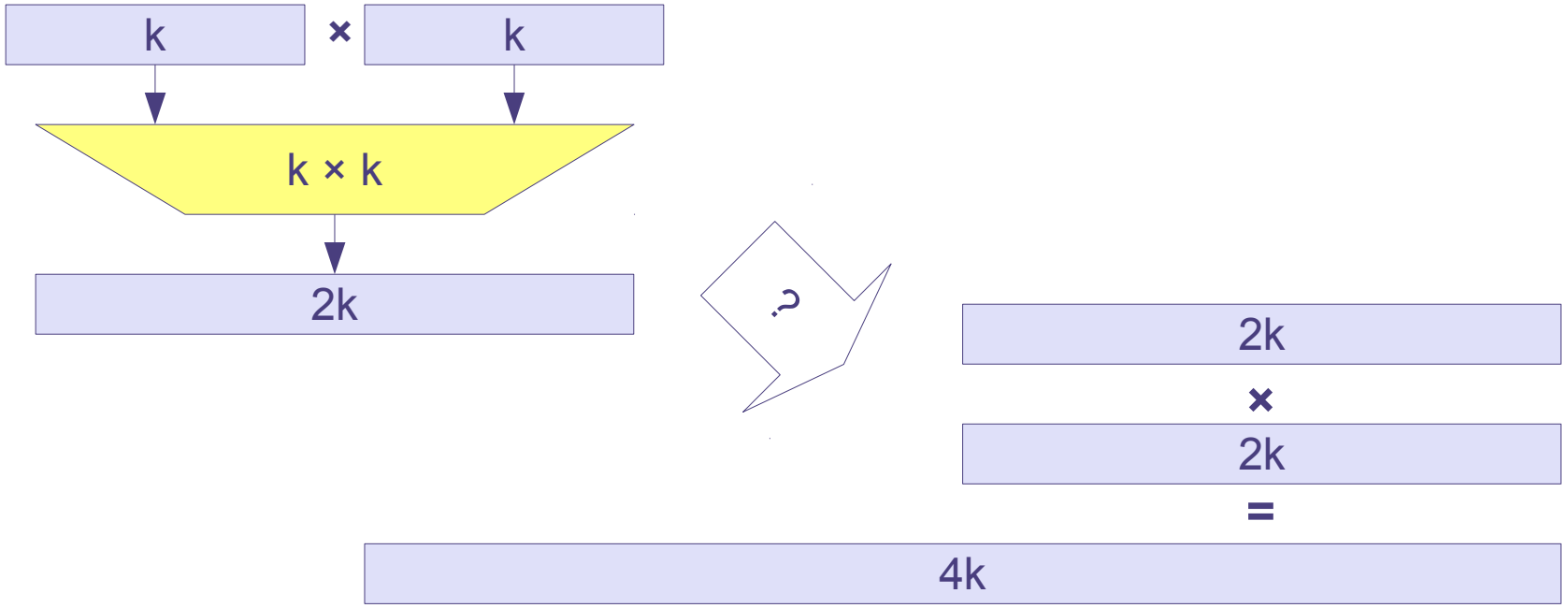






Mnożenie „długich” liczb

- Jak pomnożyć „długie” liczby dysponując „krótszymi” jednostkami mnożącymi
- np. 2k * 2k za pomocą mnożarki k*k ?

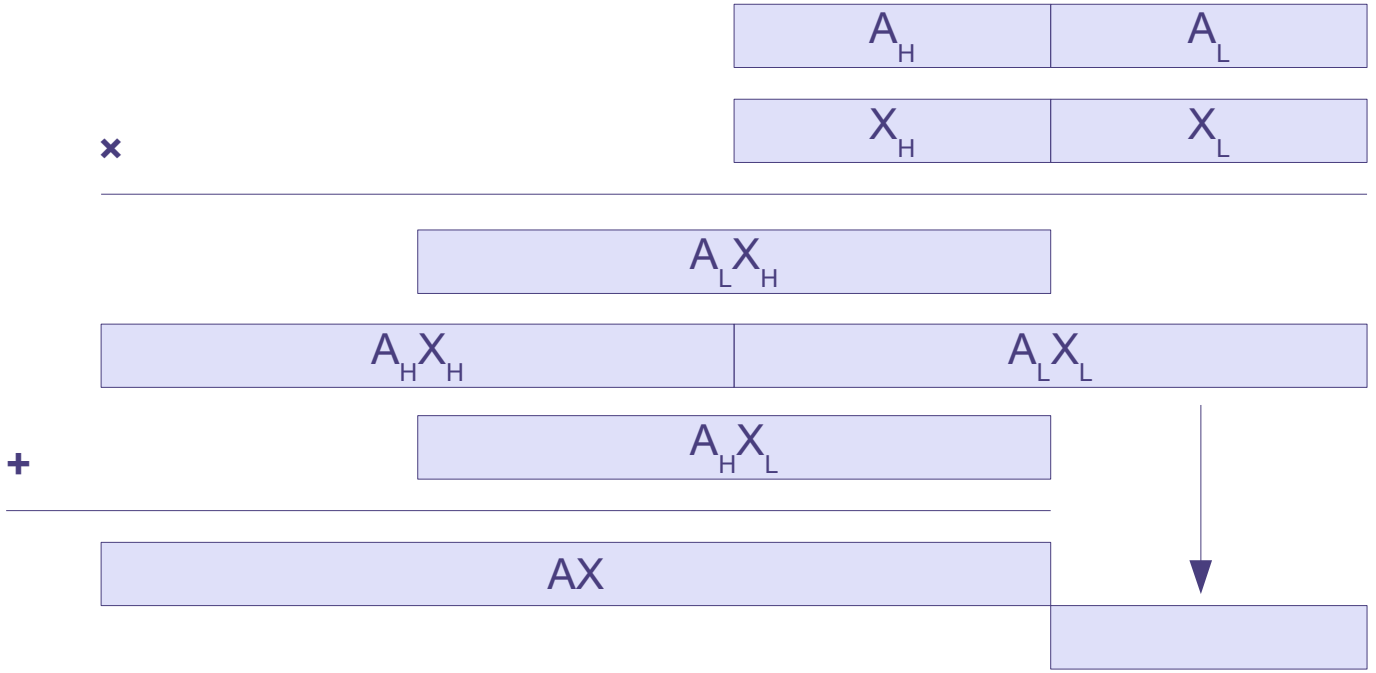


Dziel i zwyciężaj (*Divide & Conquer*)

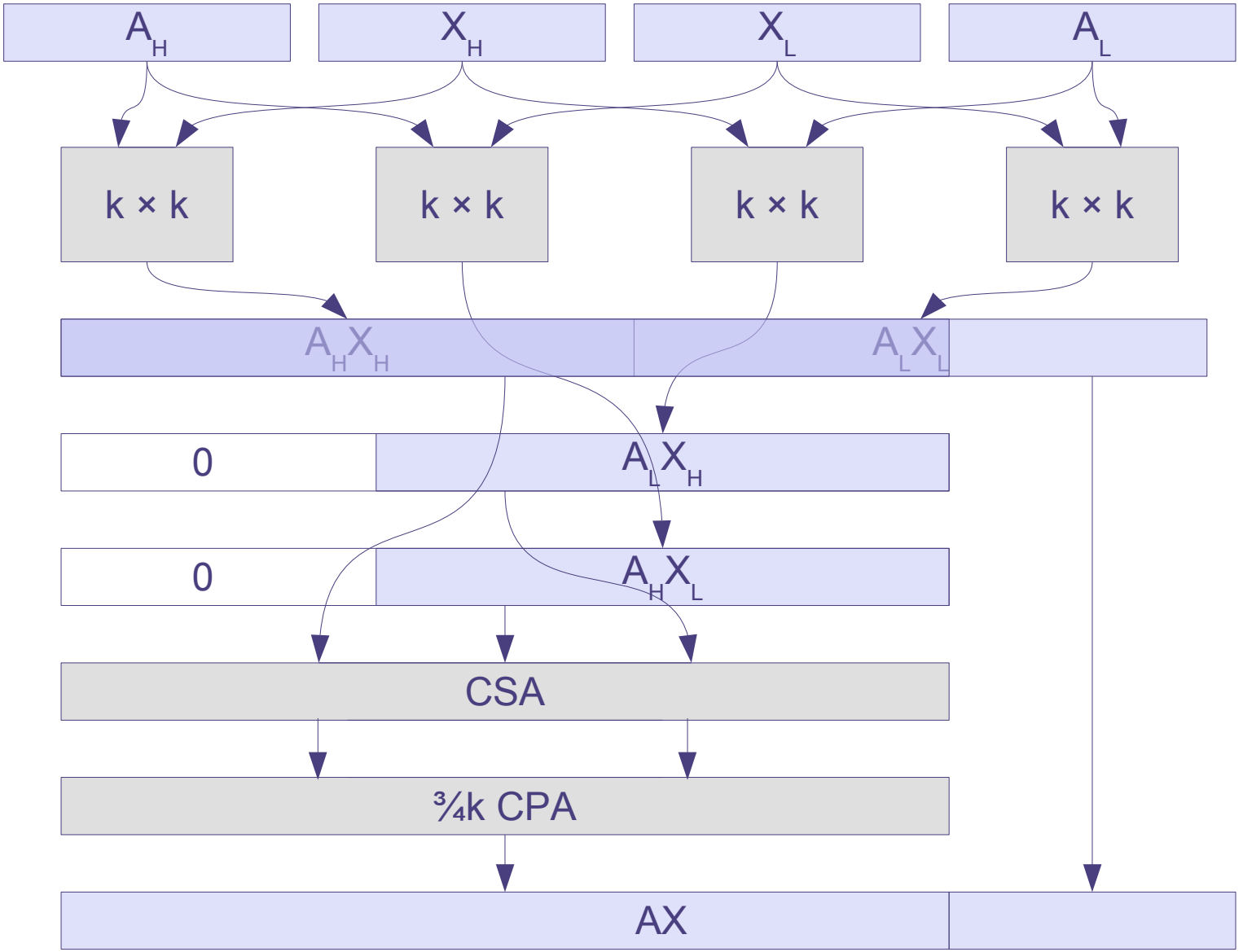
- Rozkład liczb (2k → 2 x k)
- Obliczenia iloczynów częściowych (4 x 2k)
- Sumowanie iloczynów częściowych (∑4 x 4k)

Dziel i zwyciężaj (*Divide & Conquer*)

- Najmłodsza część wyniku jest dostępna bezpośrednio
- Częściowe iloczyny nie nakładają się
- Końcowe dodawanie wymaga „krótszego” sumatora

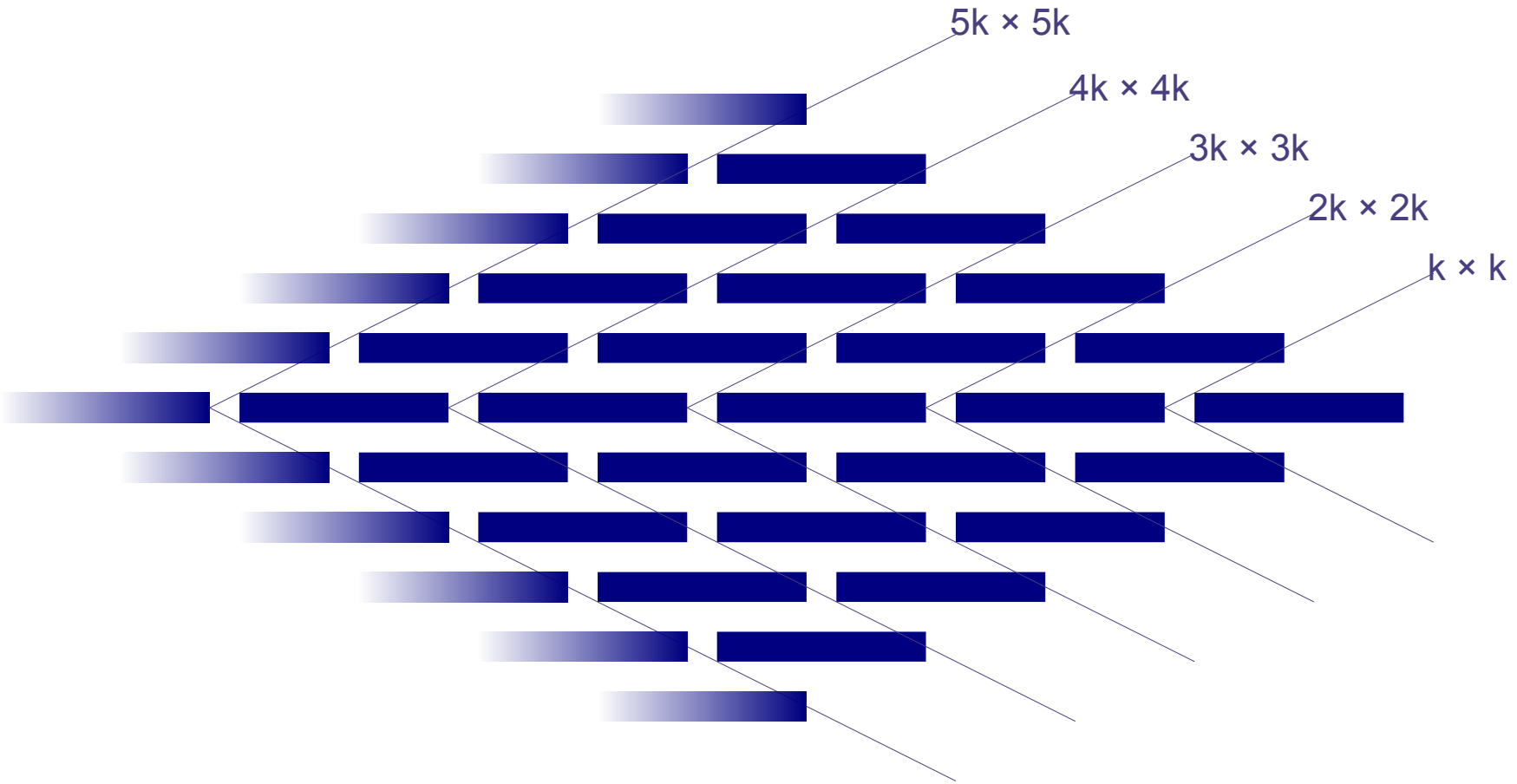


Dziel i zwyciężaj (2k x 2k)

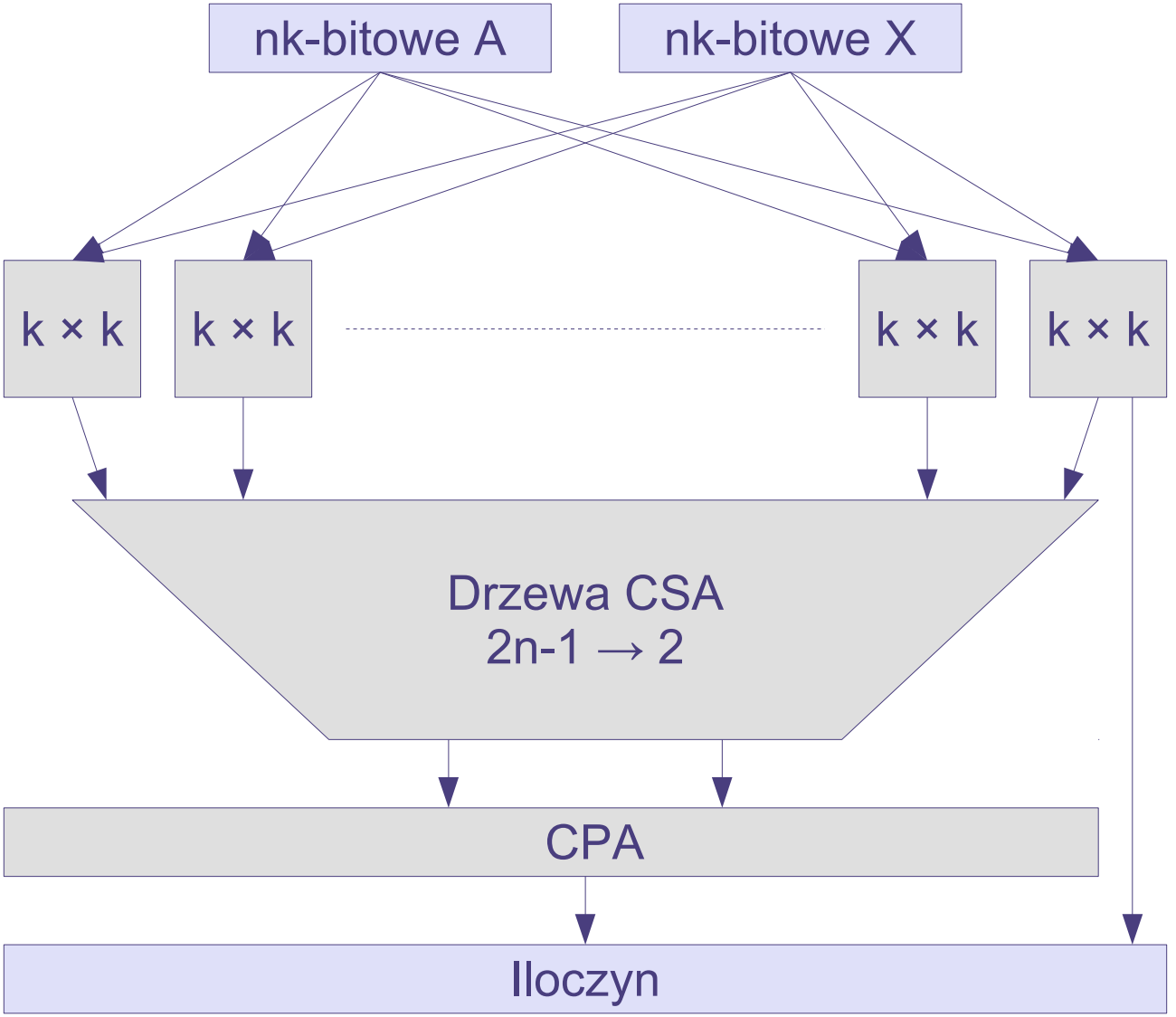


Dziel i zwyciężaj - ogólnie

- Mnożenie dwóch n*k-bitowych liczb za pomocą k-bitowych mnożarek wymaga n*n mnożeń i dodania 2n-1 składników



Dziel i zwyciężaj - ogólnie



n^2 mnożarek