

Description d'une grandeur sinusoïdale

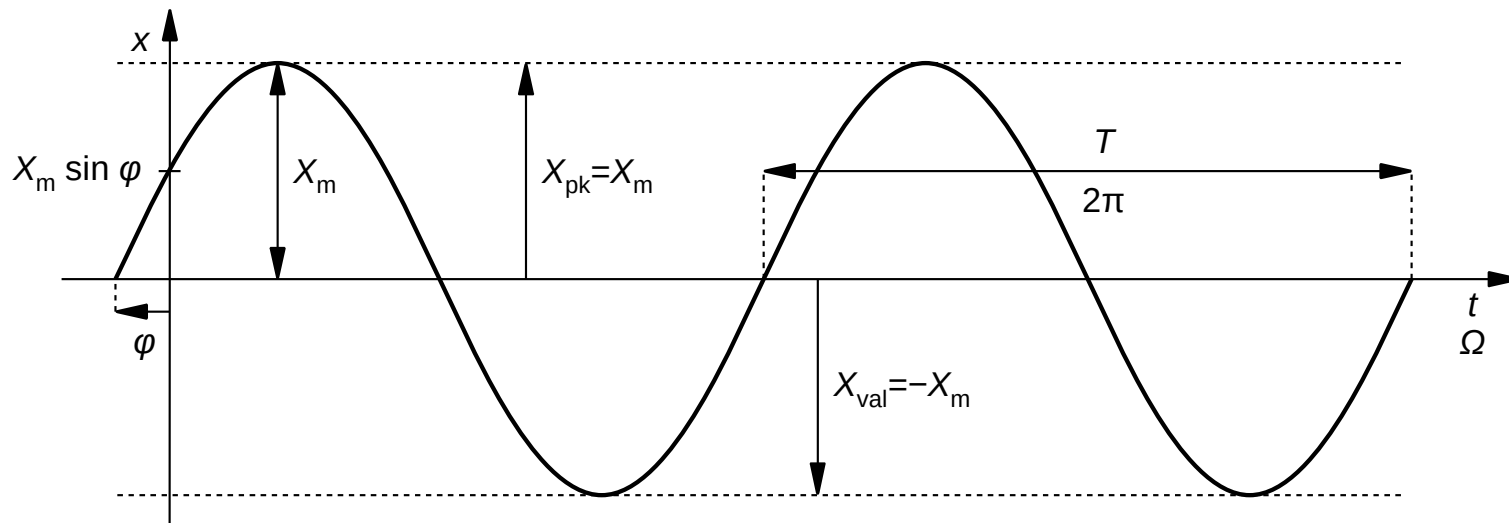
- Formule mathématique

$$x = X_m \sin(\omega t + \varphi)$$

- ♦ X_m : **amplitude** (ou valeur maximale, égale à la valeur de crête)
- ♦ ω : **pulsation** = $2\pi f$
- ♦ φ : **phase à l'origine**
- ♦ Le terme $\omega t + \varphi$ représente **phase** Ω qui est un angle

- Deux points du temps caractéristiques :

- ♦ $t = 0$: $x = X_m \sin \varphi$ φ est bien la phase à l'origine
- ♦ $t = T$: $x = X_m \sin(2\pi + \varphi) = X_m \sin \varphi$ $\Delta t = T$ correspond à $\Delta\Omega = 2\pi$

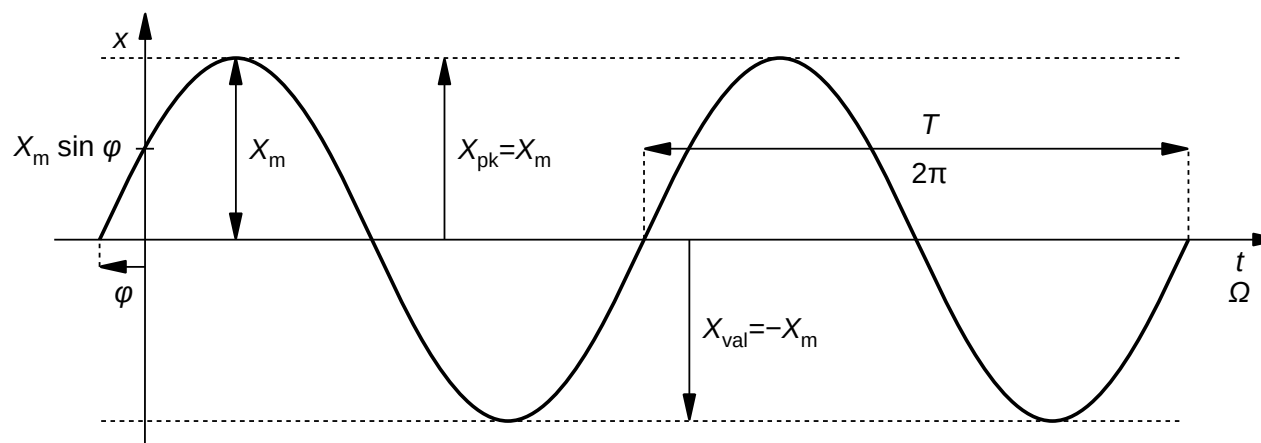


Valeur moyenne d'une grandeur sinusoïdale

- La fonction sinus est symétrique par rapport à l'axe du temps, alors $|X_{pk}| = |X_{val}| = X_m$ et **sa valeur moyenne est nulle**

$$\begin{aligned} X_{av} &= \frac{1}{T} \int_0^T X_m \sin(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{T} X_m \left[-\frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) \right]_0^T = \\ &= -\frac{X_m}{T \omega} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T} T + \varphi\right) - \cos(0 + \varphi) \right] = -\frac{X_m}{T \omega} \left[\cos(2\pi + \varphi) - \cos \varphi \right] = \\ &= -\frac{X_m}{T \omega} \left[\cos \varphi - \cos \varphi \right] = 0 \end{aligned}$$

- $X_0 = 0$ alors une grandeur sinusoïdale est une grandeur **alternative**



Valeur efficace d'une grandeur sinusoïdale

- Pour simplifier le calcul, on assume $\varphi = 0$ et on intègre de 0 à T
 - ♦ Ça ne change pas le résultat, car φ juste décale la fonction le long de l'axe t

$$X_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (X_m \sin \omega t)^2 dt} = X_m \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (\sin \omega t)^2 dt}$$

- Selon une formule de calcul intégral

$$\begin{aligned} \int_0^T (\sin \omega t)^2 dt &= \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega t) \right]_0^T = \\ &= \left[\frac{T}{2} - \frac{1}{4\omega} \sin\left(\frac{2\pi}{T} T\right) \right] - \left[\frac{0}{2} - \frac{1}{4\omega} \sin 0 \right] = \frac{T}{2} \end{aligned}$$

- Finalement :

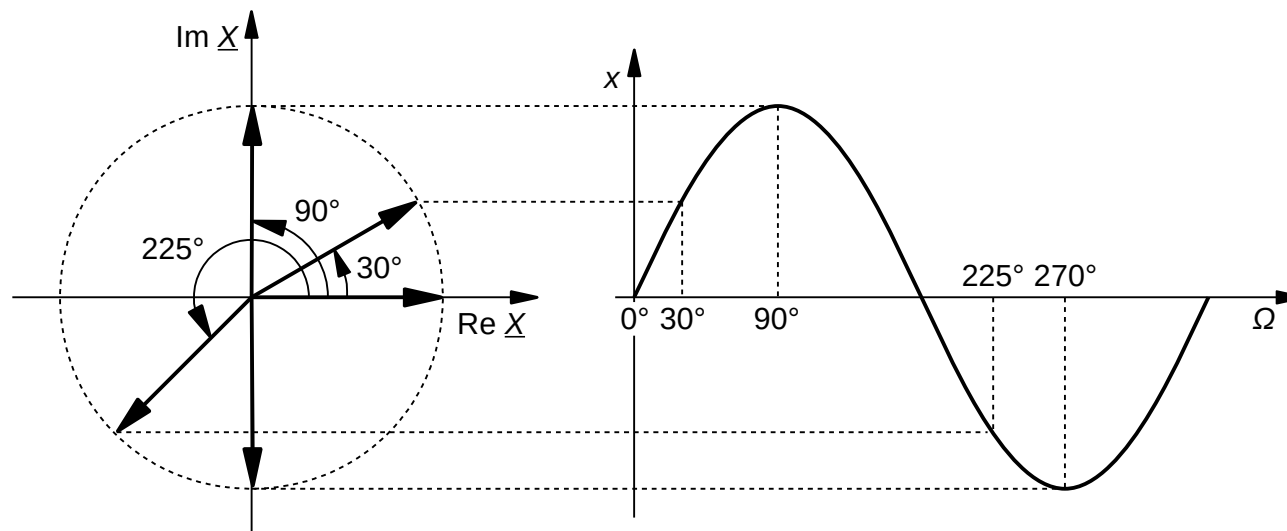
$$X_{\text{rms}} = X_m \sqrt{\frac{1}{T} \frac{T}{2}} = \frac{X_m}{\sqrt{2}} \approx \frac{X_m}{1,41} \text{ ou } 0,707 X_m$$

Exercices

- 4.3.1. Calculer l'amplitude de la tension sinusoïdale d'alimentation du réseau basse tension européen où la valeur efficace est de 230 V.
- 4.3.2. Calculer le courant efficace nominal d'une ampoule dont la tension nominale est de 230 V et la puissance nominale est de 35 W.
- 4.3.3. L'entrée d'un appareil de mesure peut être représentée comme une résistance de 50 Ω . Déterminer la valeur efficace et l'amplitude maximales d'une tension sinusoïdale appliquée à cette entrée si la puissance admissible y dissipée est de 0,5 W.

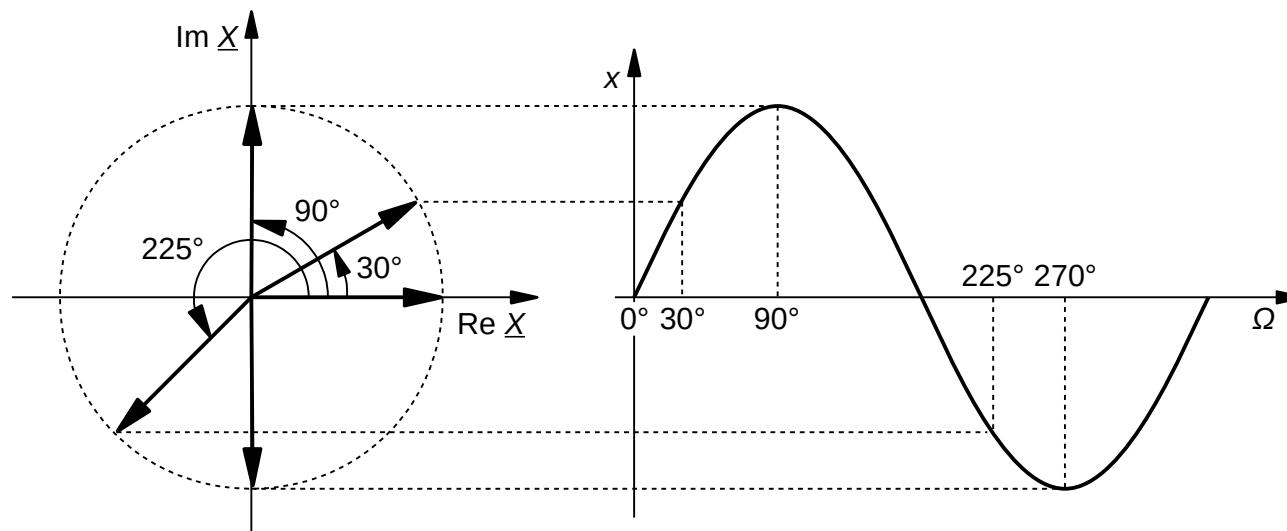
Représentation des grandeurs sinusoïdales avec les phaseurs

- Une grandeur sinusoïdale peut être représentée avec un vecteur correspondant appelé **phaseur** (ou vecteur de Fresnel)
 - ♦ La **longueur** du phaseur = **valeur efficace** X de la grandeur x en jeu
 - ♦ L'**angle** que forme le phaseur avec l'axe horizontale = **phase** Ω de la grandeur x
- En principe, un phaseur tourne constamment dans le temps
 - ♦ Le nombre de révolutions du phaseur par seconde est équivalent à la fréquence de la grandeur en jeu
 - ♦ Par convention, le sens de cette rotation est antihoraire



Représentation des grandeurs sinusoïdales avec les phaseurs (suite)

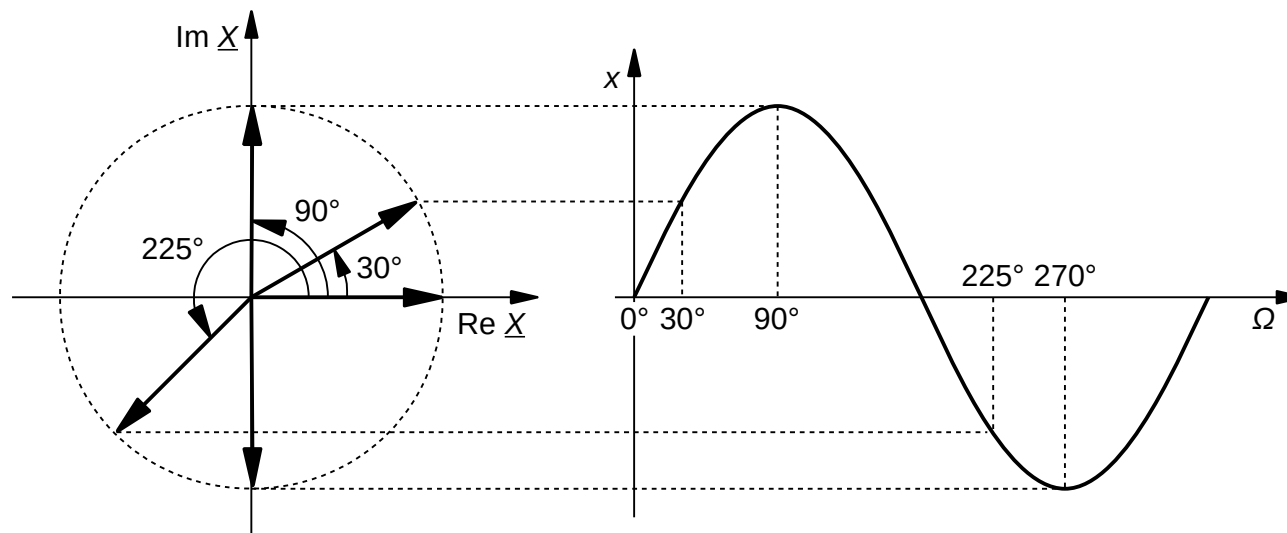
- La **composante verticale** du phaseur est égale à sa longueur multipliée par sinus de la phase actuelle Ω
 - ♦ Cela découle directement de la définition de la fonction sinus
 - ♦ Elle correspond alors à la **valeur de la grandeur en jeu au moment donné**
 - ♦ En fait, il faut encore multiplier le résultat par $\sqrt{2}$ car (par convention) la longueur du phaseur, c'est sa valeur efficace et non pas son amplitude
- Plus pratique : supposer que c'est le système de coordonnées qui tourne (dans le sens horaire) tandis que **les phaseurs sont immobiles**
 - ♦ Nécessite que **toutes les grandeurs possèdent une même fréquence**



Représentation des grandeurs sinusoïdales avec les nombres complexes

- **Formule d'Euler :** $X e^{j\Omega} = X \cos \Omega + j X \sin \Omega$ À rebours :
 $X \sin \Omega = \text{Im} \{ X e^{j\Omega} \}$
 $X \sin \Omega = X \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im} \{ X e^{j(\omega t + \varphi)} \} = \text{Im} \{ X e^{j\omega t} e^{j\varphi} \}$
- Plus pratique : l'équivalent de la supposition de l'immobilité des phaseurs, c'est de **négliger la composante variable ωt**
 - ♦ On garde en mémoire que la grandeur varie dans le temps mais on néglige ce fait dans sa représentation géométrique ou algébrique
 - ♦ Toujours on utilise la **valeur efficace comme le module du nombre complexe**

$$x(t) = X \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \underline{X} = X e^{j\varphi}$$



Déphasage

- Le **déphasage** est le **décalage entre deux formes d'onde** exprimé en termes de la phase
- Il est égal à la **différence des phases aux origines**

$$\Delta \varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = -\Delta \varphi_{21}$$

- ♦ Par convention, pour le courant et la tension d'un dipôle, c'est le déphasage **de la tension par rapport au courant** (son signe est donc important) :

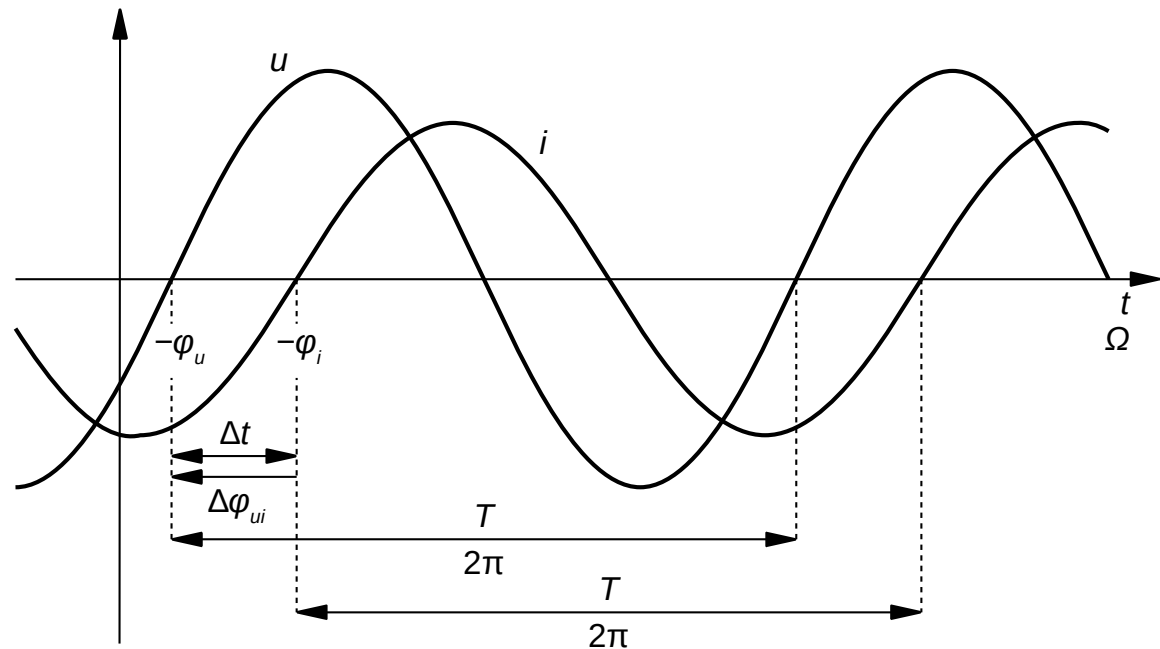
$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$\varphi = \Delta \varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i$$

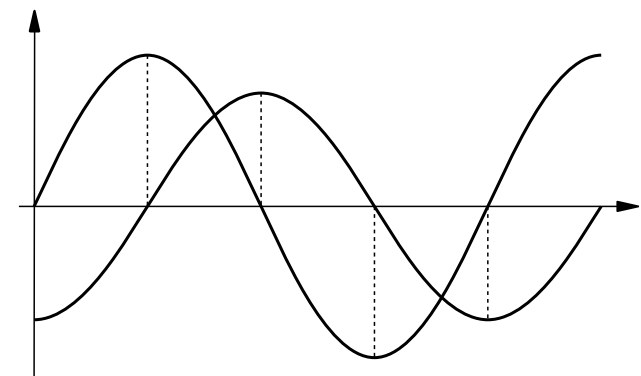
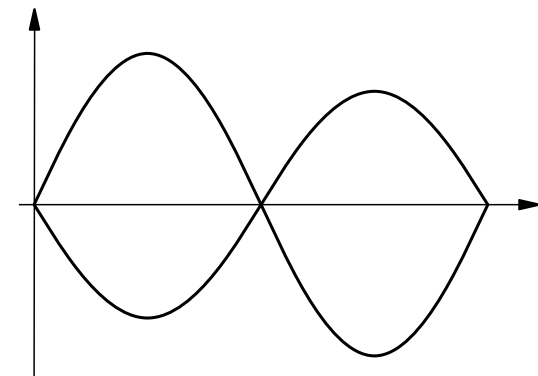
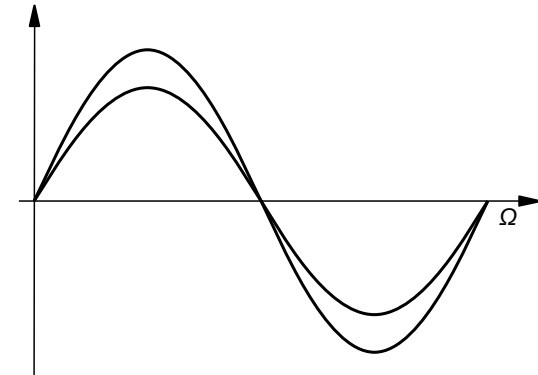
- Prenant en compte que la période T correspond à 2π ou 360° en termes de la phase :

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta \varphi}{2\pi} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta \varphi}{360^\circ}$$



Déphasages particuliers

- Déphasage **nul**
 - ◆ $\Delta t = 0$
 - ◆ $\Delta\varphi = 0^\circ = 0$
 - ◆ Grandeurs **en phase**
- Déphasage d'une **demi période**
 - ◆ $\Delta t = T/2$
 - ◆ $\Delta\varphi = 180^\circ = \pi$
 - ◆ Grandeurs **en opposition de phase**
- Déphasage d'un **quart période**
 - ◆ $\Delta t = T/4$
 - ◆ $\Delta\varphi = 90^\circ = \pi/2$
 - ◆ Grandeurs **en quadrature de phase**



Détermination du déphasage avec les phaseurs et avec les nombres complexes

- La **phase à l'origine**, c'est l'**argument** du nombre complexe associé

$$\varphi_u = \arg\{\underline{U}\} = \arctan \frac{\text{Im } \underline{U}}{\text{Re } \underline{U}}$$

$$\varphi_i = \arg\{\underline{I}\} = \arctan \frac{\text{Im } \underline{I}}{\text{Re } \underline{I}}$$

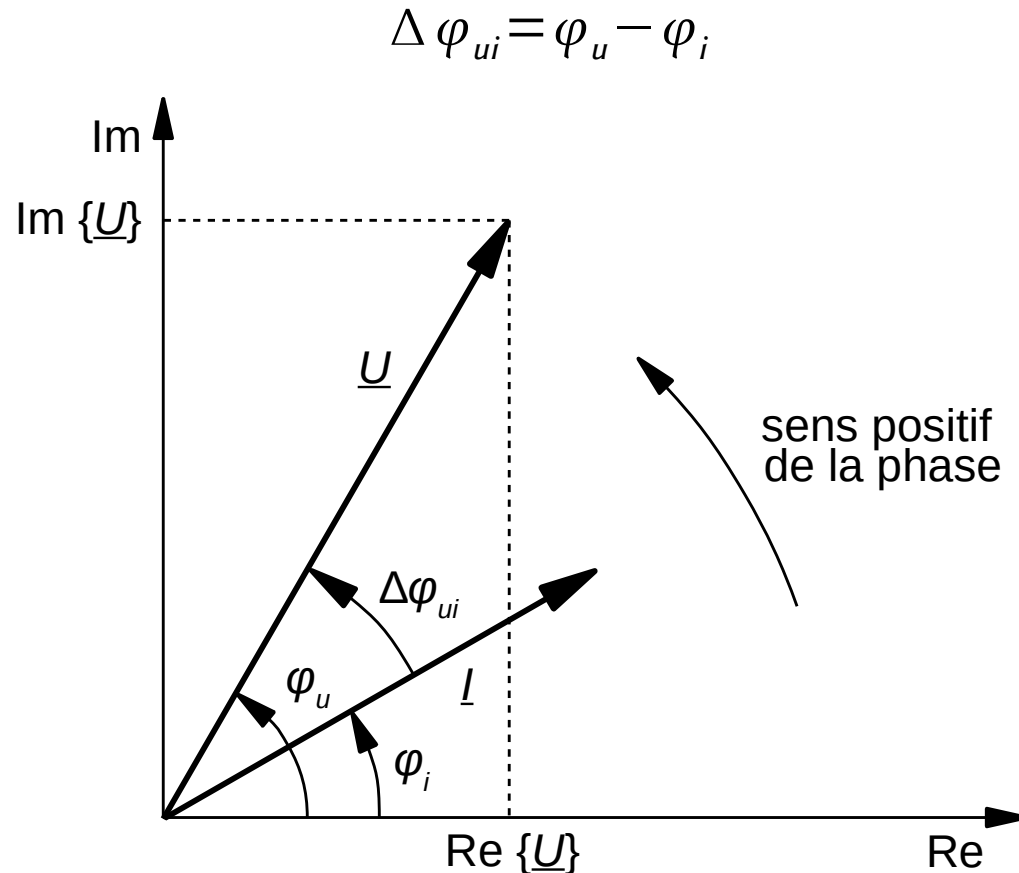
- En utilisant la représentation d'Euler

$$\underline{U} = U e^{j\varphi_u}$$

$$\underline{I} = I e^{j\varphi_i}$$

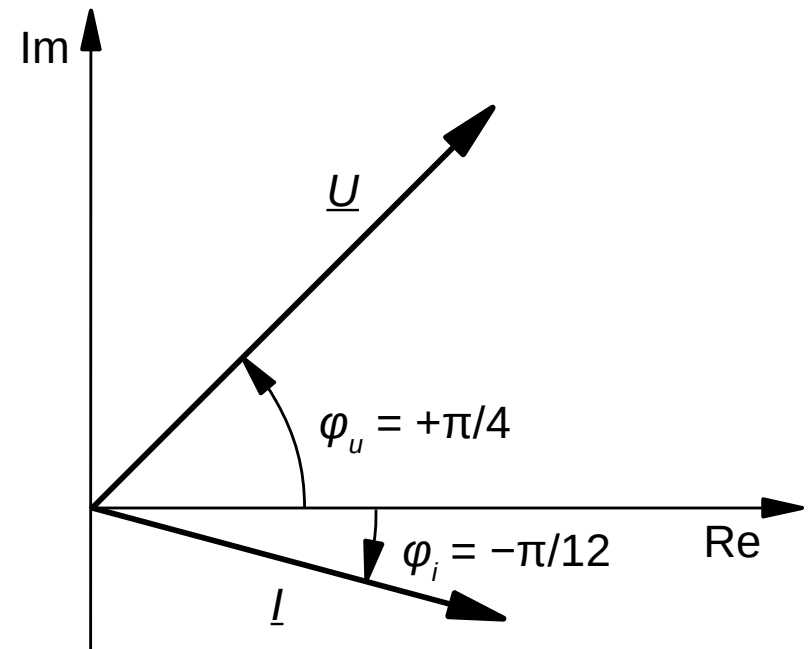
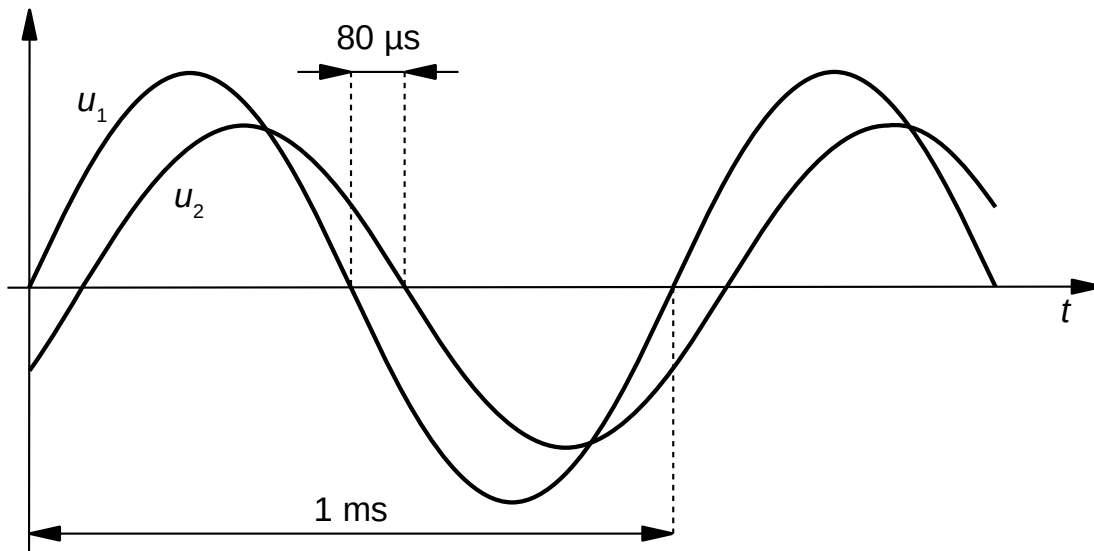
$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \frac{U}{I} e^{j\Delta\varphi_{ui}}$$

$$\text{alors } \Delta\varphi_{ui} = \arg\left\{\frac{\underline{U}}{\underline{I}}\right\}$$



Exercices

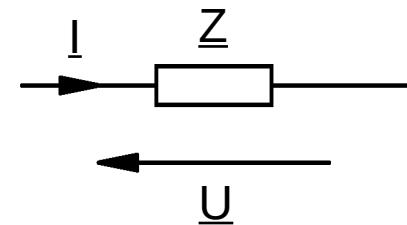
- 4.4.1. Déterminer le nombre complexe associé pour la tension :
 $u(t) = (12 \sqrt{2}) \text{ V } \sin(\omega t + \pi/4)$
- 4.4.2. Déterminer le déphasage :
a) de la tension u_2 par rapport à u_1 ; b) entre le courant et la tension



Impédance et admittance

- En régime sinusoïdal, c'est l'**impédance complexe** qui **décrit la relation entre la tension et le courant d'un dipôle**

$$\underline{Z} = \frac{U}{I}$$



- Unité : ohm [Ω]

- C'est un **nombre complexe**

$$\underline{Z} = \frac{U e^{j\varphi_u}}{I e^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I} e^{j\varphi_u} e^{j-\varphi_i} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z e^{j\varphi} \Rightarrow |\underline{Z}| = Z = \frac{U}{I} = \frac{U_m / \sqrt{2}}{I_m / \sqrt{2}} = \frac{U_m}{I_m}$$

$$\arg \underline{Z} = \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

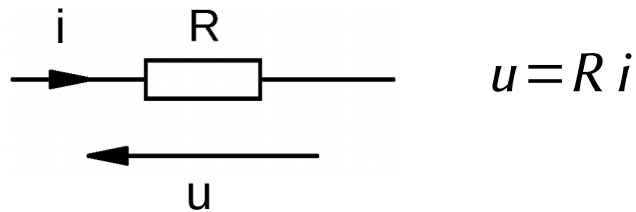
- Son **module** exprime le **rapport des valeurs efficaces** (ou des amplitudes)
- Son **argument** exprime le **décalage en phase** donc déphasage
- L'**admittance complexe** correspond à la conductance

$$\underline{Y} = \frac{I}{U} = \frac{1}{\underline{Z}} \Rightarrow Y = \frac{I}{U} = \frac{1}{Z} \quad \arg \underline{Y} = \varphi_i - \varphi_u = -\arg \underline{Z}$$

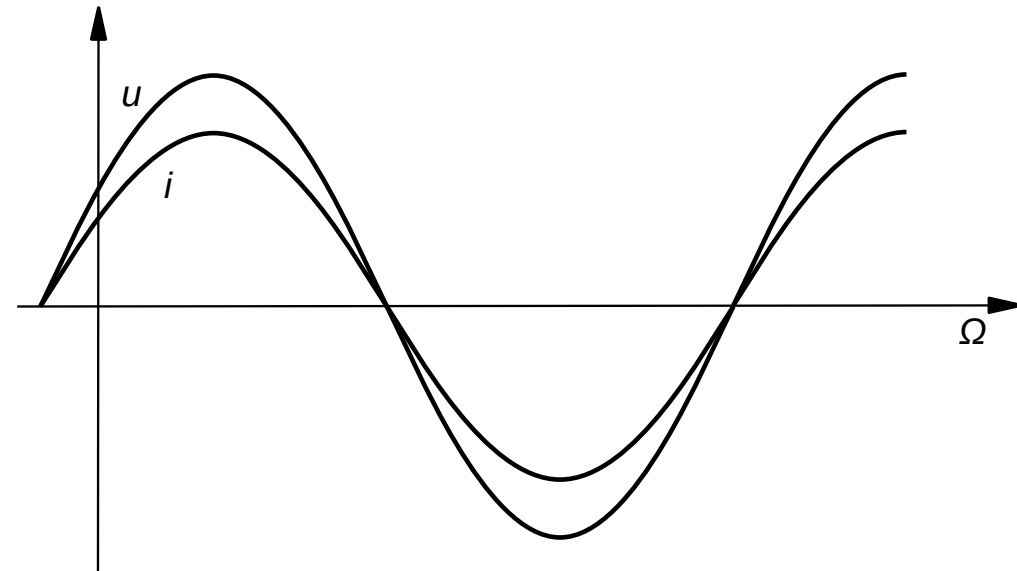
- Unité : siemens [S]

Résistor parfait en régime sinusoïdal

- La loi d'Ohm s'appliquant aux valeurs instantanées, **la tension est en phase avec le courant**



$$u = R i$$



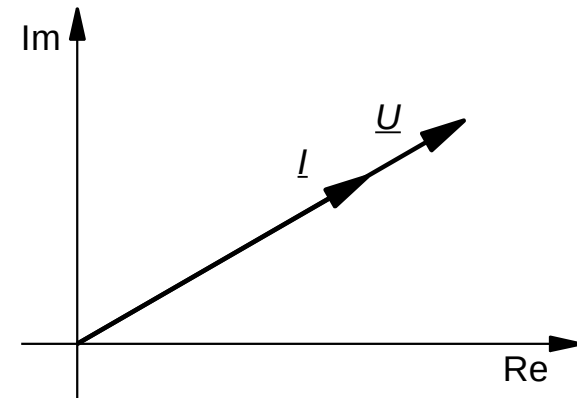
$$i = I \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_i) \Rightarrow \underline{I} = I e^{j\varphi_i}$$

$$u = R I \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_i) \Rightarrow \underline{U} = R I e^{j\varphi_i}$$

$$\underline{Z}_R = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R e^{j0} = R$$

$$Z_R = R \quad \varphi_R = 0$$

$$\underline{Y}_R = \frac{1}{R} = G$$



Bobine

- Composant électrique basé sur un enroulement d'un fil conducteur
- Son fonctionnement découle de deux lois basiques de l'électromagnétisme (équations de Maxwell)

- ♦ Loi de Faraday : un champ magnétique B variable (la bobine **ne fonctionne pas en régime continu**) induit un champ électrique et donc une tension

$$u = n A \frac{dB}{dt}$$

- ♦ Loi d'Ampère : un courant traversant un fil induit un champ magnétique

$$B \ell = \mu n I$$

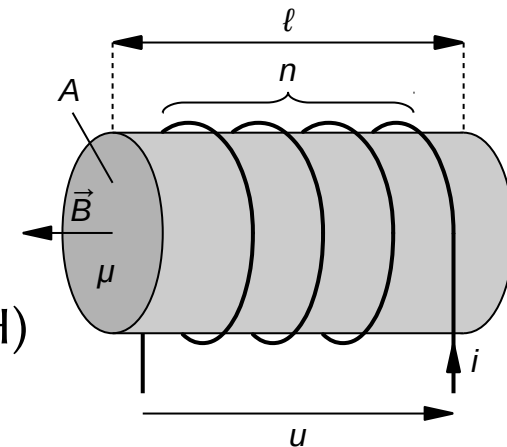
- En combinant, la **relation courant-tension** est

$$u = \frac{\mu n^2 A}{\ell} \frac{di}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

- ♦ L : **inductance** (unité : henry [H], typiquement nH...mH)
- ♦ μ : **perméabilité magnétique** [H/m]

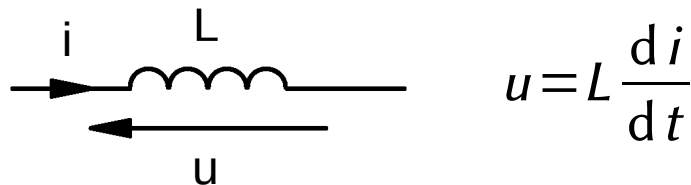
- Dans le champs magnétique, **une énergie est accumulée**

$$E = \frac{1}{2} L i^2$$



Comportement électrique de la bobine

- L'impédance d'une bobine **augmente avec la fréquence**
- Elle **ne permettra** un courant d'une haute fréquence de la traverser
- Elle **s'opposera** à des changements rapides du **courant**



$$u = L \frac{di}{dt}$$

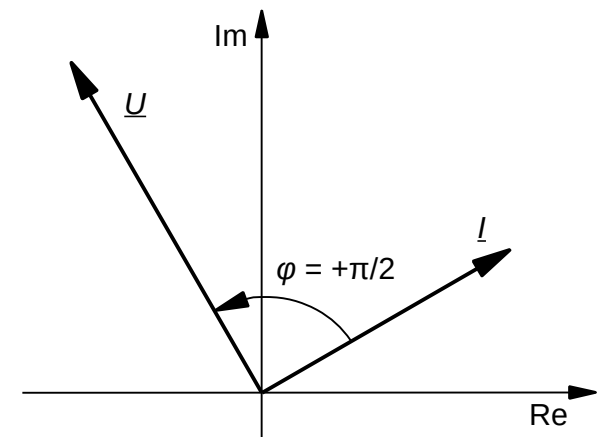
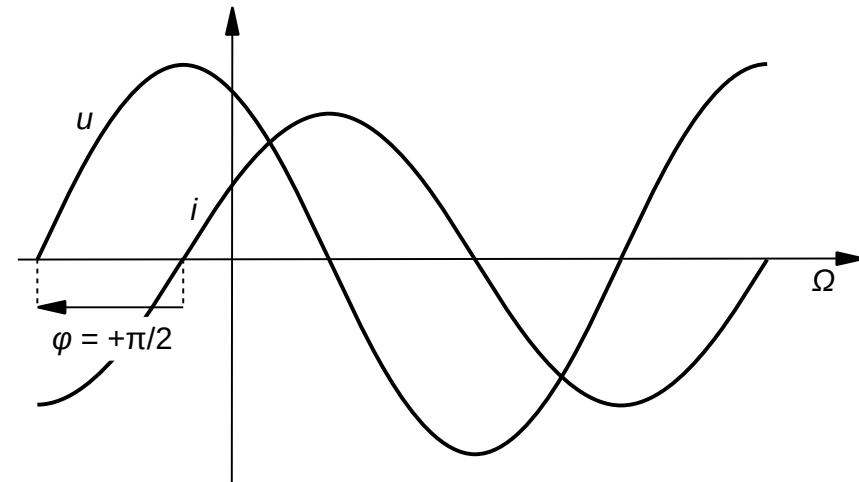
$$i = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_i) \Rightarrow \underline{I} = I e^{j\varphi_i}$$

$$u = L I \sqrt{2} \frac{d}{dt} \sin(\omega t + \varphi_i) = L I \sqrt{2} \omega \cos(\omega t + \varphi_i) =$$

$$= \omega L I \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \underline{U} = \omega L I e^{j(\varphi_i + \pi/2)}$$

$$\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \omega L e^{j\pi/2} = j\omega L \quad \underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega L} = -\frac{j}{\omega L}$$

$$Z_L = \omega L \quad \varphi_L = +\frac{\pi}{2}$$



Condensateur

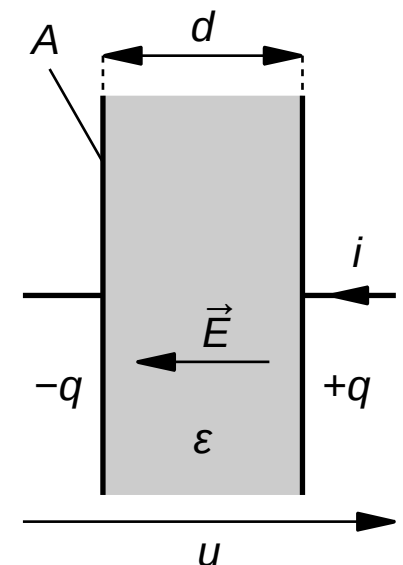
- Matériaux diélectriques
 - ♦ Ne contiennent pas de charges mobiles \Rightarrow **courant continu impossible**
 - ♦ Un champ électrique y peut apparaître grâce aux dipôles électriques
- Condensateur plan : la plus simple structure idéalisée
 - ♦ Avec u constant, **une charge proportionnelle accumule** : positive q à la borne positive et négative de la même valeur q , à la borne négative
 - ♦ Si u change, alors q doit changer \Rightarrow il y aura un mouvement de charge, donc un flux de courant \Rightarrow **avec une tension variable, un courant circulera**

- **Relation courant-tension**

$$q = C u \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dt} = i = C \frac{du}{dt} \quad C = \frac{\epsilon A}{d}$$

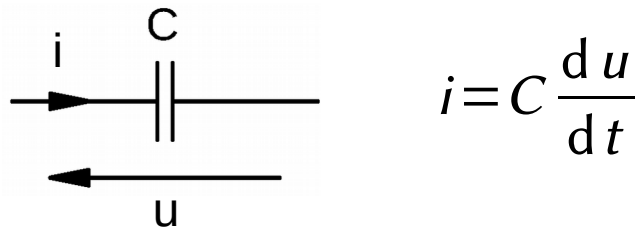
- ♦ C : **capacité** (unité : farad [F], typiquement pF... μ F)
- ♦ ϵ : **permittivité diélectrique** [F/m]
- Énergie accumulée dans le champ électrique

$$E = \frac{1}{2} C u^2$$



Comportement électrique du condensateur

- L'impédance d'un condensateur **diminue avec la fréquence**
- Elle **laissera** un courant d'une haute fréquence de la traverser facilement sans une importante chute de tension correspondante
- Elle **s'opposera** à des changements rapides de la **tension**



$$i = C \frac{du}{dt}$$

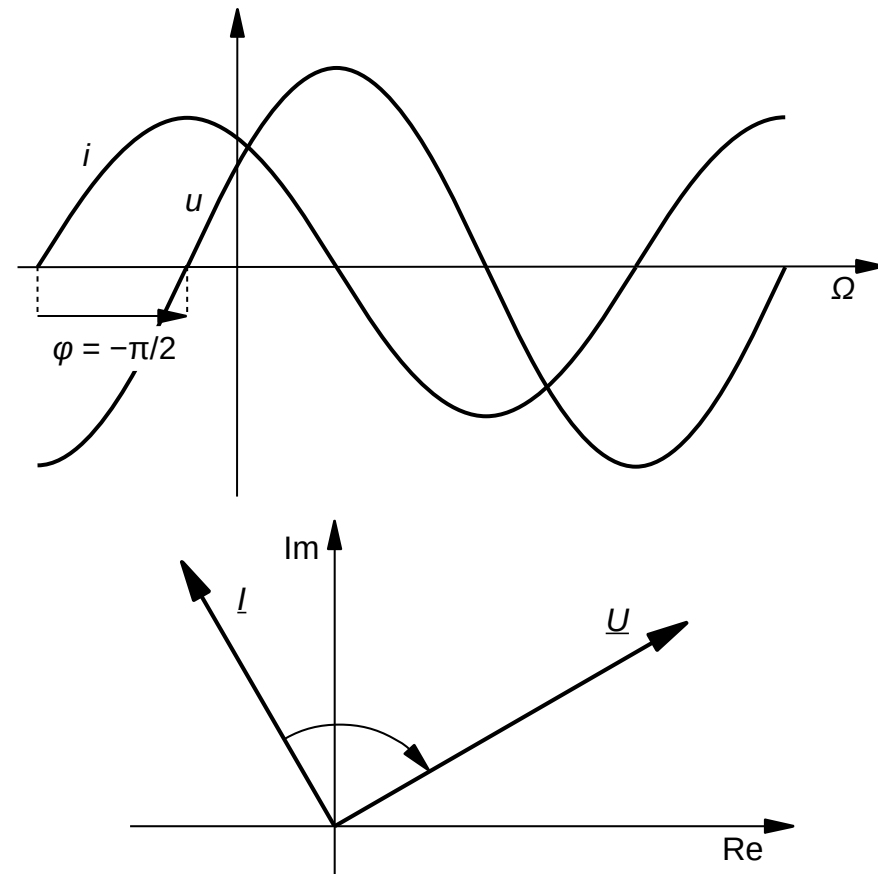
$$u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_u) \Rightarrow \underline{U} = U e^{j\varphi_u}$$

$$i = C U \sqrt{2} \omega \cos(\omega t + \varphi_u) =$$

$$= \omega C U \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \underline{I} = \omega C U e^{j(\varphi_u + \pi/2)}$$

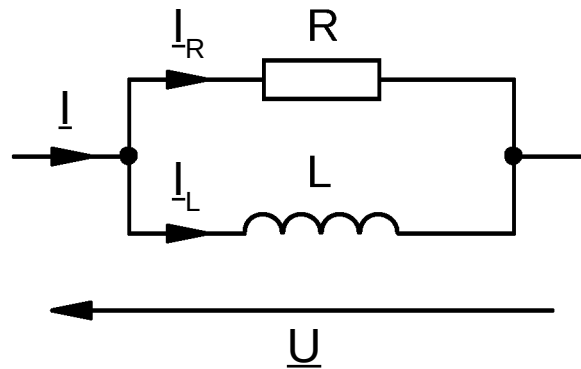
$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} = -\frac{j}{\omega C} \quad \underline{Y}_C = j\omega C$$

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} \quad \varphi_C = -\frac{\pi}{2}$$



Exercice

- 4.5.1. Le circuit ci-dessous est alimenté à partir d'une source de tension sinusoïdale \underline{U} . Avec un multimètre, on a mesuré $I_R = 10$ mA, $I_L = 25$ mA (valeurs efficaces). Déterminer la valeur efficace du courant \underline{I} ainsi que son déphasage par rapport à la tension \underline{U} .



Circuits linéaires en régime sinusoïdal

- La bobine et le condensateur sont des **composants linéaires**
 - ♦ Ils sont décrits par des équations différentielles mais toujours linéaires
- Si toutes les sources dans un circuit linéaire sont sinusoïdales d'une fréquence donnée, alors toutes les tensions et tous les courants dans ce circuit **sont également sinusoïdaux de la même fréquence**
 - ♦ Il est possible d'utiliser leur représentation par phaseurs ou par nombres complexes
- Aux phaseurs ainsi qu'aux nombres complexes représentant des grandeurs sinusoïdales **dans un circuit linéaire, s'appliquent** :
 - ♦ la loi d'Ohm
 - ♦ les lois de Kirchhoff (la loi des nœuds, la loi des mailles)
 - ♦ les théorèmes de Norton et de Thévenin
 - ♦ le principe de superposition
 - ♦ donc aussi toutes les formules dérivées (diviseur de tension, diviseur de courant, association en série, association en parallèle...)

Associations de dipôles passifs linéaires en régime sinusoïdal

- Une association de dipôles passifs linéaires **se comporte comme un dipôle passif linéaire**
 - ♦ Elle peut être caractérisée par **une impédance ou une admittance complexe équivalente**
- À partir des lois de Kirchhoff, on reçoit

- ♦ pour une **association en série** :

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \sum_k \underline{Z}_k$$

- ♦ pour une **association en parallèle** :

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = \sum_k \underline{Y}_k \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k}$$

- Comme l'impédance (ou l'admittance) équivalente peut être traité d'un dipôle à part, **la loi d'Ohm s'y applique aux valeurs effectives**

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{U_{\text{eq}}}{I_{\text{eq}}} \quad \text{mais également} \quad Z_{\text{eq}} = \frac{U_{\text{eq}}}{I_{\text{eq}}}$$

Exercice

- 4.6.1. Une bobine est alimentée à partir d'un générateur dont la résistance interne est de 50Ω . On a réglé l'amplitude du générateur à 5 V et sa fréquence à 1 kHz .
 - a) Calculer l'inductance de la bobine si on a mesuré un courant de 35 mA .
 - b) Quel est le déphasage de ce courant par rapport à la tension interne du générateur ?
 - c) Tracer la tension interne du générateur, le courant et la tension aux bornes de la bobine.



Puissance moyenne d'un dipôle linéaire en régime sinusoïdal

- Considérons un courant et une tension sinusoïdaux déphasés de φ

$$\begin{aligned}i &= I \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_i) & u &= U \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_i + \varphi) \\p &= u i = U \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_i + \varphi) \cdot I \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_i) = \\&= U I \left[\cos(\omega t + \varphi_i + \varphi - \omega t - \varphi_i) - \cos(\omega t + \varphi_i + \varphi + \omega t + \varphi_i) \right] = \\&= U I \left[\cos \varphi - \cos(2\omega t + 2\varphi_i + \varphi) \right] \\&\text{en utilisant : } 2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\end{aligned}$$

- **Puissance active**

$$P = (p)_{av} = U I (\cos \varphi + 0) = U I \cos \varphi$$

car $\cos \varphi$ est une constante et la valeur moyenne de $\cos 2\omega t$ est nulle

- Cas particuliers de **composants parfaits**

- ♦ Résistor : $P = U I \cos 0^\circ = U I$
- ♦ Bobine : $P = U I \cos 90^\circ = 0$
- ♦ Condensateur : $P = U I \cos(-90^\circ) = 0$

- La bobine ni le condensateur parfaits **ne consomment pas de puissance nette** et donc ils **ne dissipent pas de l'énergie**

Puissance apparente

- La **puissance active**, c'est la **puissance consommée nette**
 - ♦ Mais attention : la puissance active d'un condensateur étant nulle, ça ne veut pas dire qu'on peut négliger son courant qui peut toutefois être important
- Le circuit doit être capable de supporter à la fois le courant I et la tension U , ce qui est exprimé par la **puissance apparente**
$$S = UI$$
 - ♦ Unité conventionnelle : voltampère [VA] (mathématiquement $1 \text{ VA} = 1 \text{ W}$)
- C'est la puissance apparente qui **décrit les capacités en tension et en courant nécessaires** des composants d'un circuit
 - ♦ Générateurs, piles, accumulateurs...
 - ♦ Résistors, bobines, condensateurs...
 - ♦ Transformateurs, convertisseurs...
- La partie de la puissance apparente qui contribue au courant mais ne contribue pas à la consommation, c'est la **puissance réactive**
 - ♦ Elle représente **la puissance qui circule entre les composants d'un circuit mais qui n'y est pas consommée**

Puissance réactive

- Une certaine énergie peut être **accumulée dans un condensateur ou une bobine** à partir d'une source **et ensuite retournée** au circuit
 - ♦ Toutefois, le condensateur et la bobine restent des composants passifs, car cette énergie retournée n'est jamais supérieure à l'énergie accumulée
- La **relation entre les trois valeurs de puissance** est exprimée par le **triangle des puissances**

- ♦ Loi de Pithagore :

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

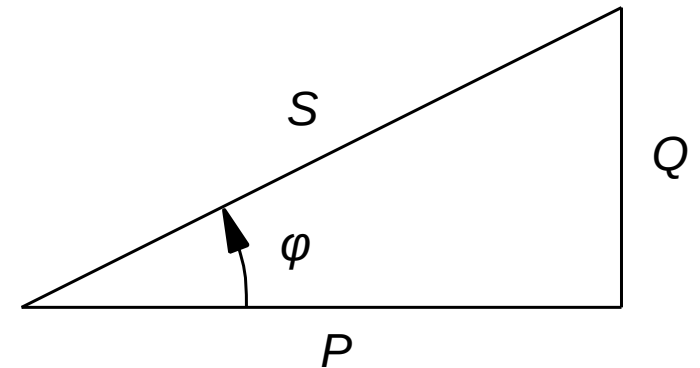
- ♦ D'où :

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{(UI)^2 - (UI)^2 \cos^2 \varphi} = \\ &= UI \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = UI \sqrt{\sin^2 \varphi} = UI \sin \varphi \end{aligned}$$

- ♦ Unité : voltampère réactif [var] (mathématiquement 1 var = 1 W)

- Cas particuliers de **composants parfaits**

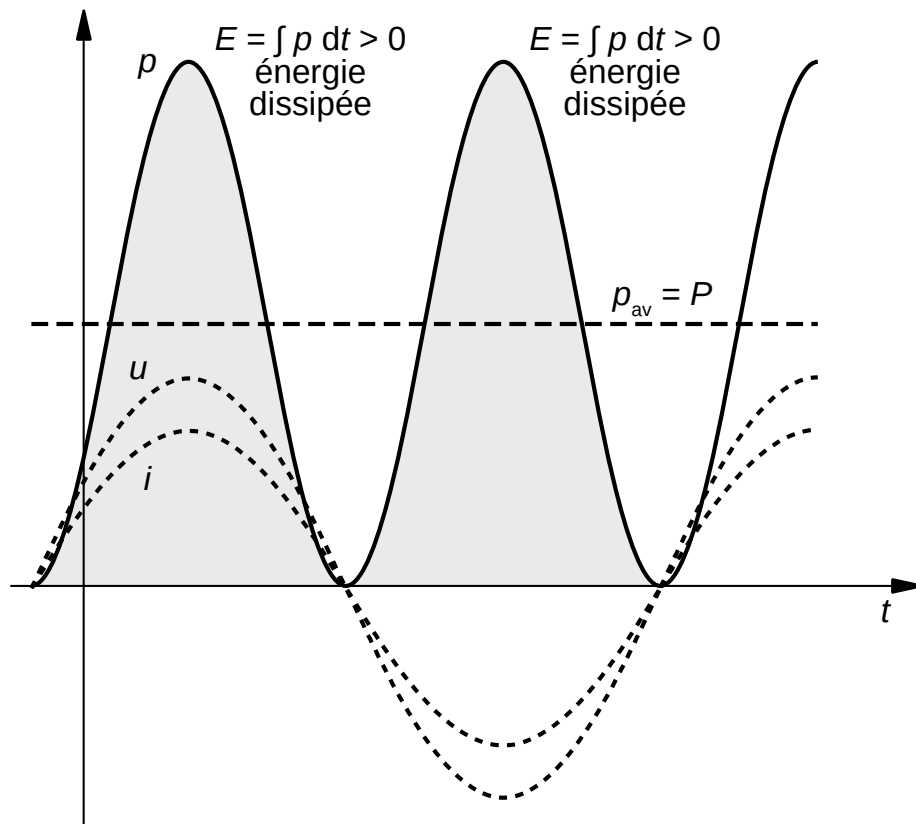
- ♦ Résistor : $Q = UI \sin 0^\circ = 0$
- ♦ Bobine : $Q = UI \sin 90^\circ = UI$
- ♦ Condensateur : $Q = UI \sin (-90^\circ) = -UI$



Analyse temporelle

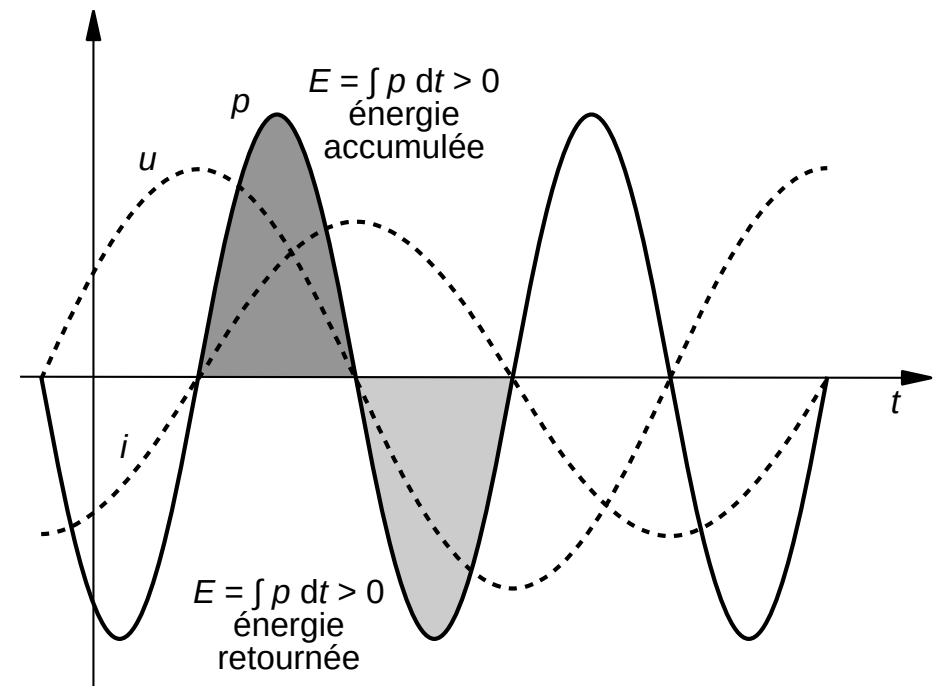
- Résistor

- ◆ À tout moment $p \geq 0$
- ◆ Composante alternative de 2ω
- ◆ **Composante constante** = P :
c'est le terme $UI \cos \varphi$



- Bobine

- ◆ La puissance instantanée est une forme d'onde **alternative**
- ◆ Énergie est **accumulée** où $p > 0$ et **la même est retournée** où $p < 0$
- ◆ Valeur moyenne = composante constante = P : **nulles**



Facteur de puissance

- **Définition** (applicable à tout dipôle en régime périodique)

$$\lambda = \frac{P}{S}$$

- Cas particulier d'un **dipôle actif en régime sinusoïdal**

$$\lambda = \frac{UI \cos \varphi}{UI} = \cos \varphi$$

- ♦ Résistor parfait : $\lambda = \cos 0^\circ = 1$
- ♦ Bobine ou condensateur parfaits : $\lambda = \cos \pm 90^\circ = 0$
- Dans un système d'alimentation à une tension périodique donnée, le facteur de puissance d'un récepteur détermine **le courant nécessaire pour y délivrer une puissance active** donnée

$$\lambda = \frac{P}{UI} \Rightarrow I = \frac{P}{U\lambda}$$

- ♦ Le **moindre courant** circulera pour un récepteur **purement résistif**
- ♦ Maximiser le facteur de puissance, c'est **minimiser le coût de l'installation** (générateur, câbles, transformateurs, convertisseurs...)

Exercice

- 4.7.1. Calculer la puissance active, la puissance réactive et la puissance apparente dans le circuit de l'exercice 4.6.1.