

Równania i układy równań nieliniowych

1. Przeczytaj szczegółowy opis i sprawdź właściwości oraz sposób użycia poniższych poleceń programu Matlab:

<i>fzero</i>	umożliwia znalezienie miejsca zerowego funkcji jednej zmiennej
<i>roots</i>	umożliwia wyznaczenie pierwiastków wielomianu
<i>polyder</i>	umożliwia wyznaczenie pochodnej wielomianu
<i>polyval</i>	umożliwia wyznaczenie wartości wielomianu w podanym punkcie
<i>fsolve</i>	umożliwia rozwiązanie układu równań nieliniowych
<i>fminsearch</i>	umożliwia znalezienie minimum funkcji wielu zmiennych
<i>fminbnd</i>	umożliwia wyznaczenie wartości argumentu wejściowego funkcji jednej zmiennej, dla którego funkcja osiąga minimum
<i>optimset</i>	pozwała utworzyć lub zmodyfikować strukturę opcji optymalizacji – polecenie wykorzystywane jako argument wejściowy funkcji: <i>fsolve</i> , <i>fminbnd</i> , <i>fminsearch</i> , <i>fzero</i> , <i>lsqnonneg</i>
<i>feval</i>	wyznacza wartość funkcji w punkcie
<i>fplot</i>	konstruuje wykres
<i>ezplot</i>	konstruuje wykres funkcji dwóch zmiennych
<i>inline</i>	pozwała zdefiniować funkcję bez konieczności tworzenia m-pliku (np. w celu przekazania definicji funkcji do innej funkcji)

2. Utwórz trzy skrypty funkcyjne wykorzystujące:

- 1) metodę bisekcji,
- 2) metodę siecznych,
- 3) metodę stycznych (Newton-Raphson)

do znalezienia z określoną dokładnością miejsc zerowych dowolnej funkcji nieliniowej jednej zmiennej. Miejsce zerowe powinno być poszukiwane w określonym przez użytkownika przedziale zmian argumentu wejściowego funkcji.

Funkcje powinny przyjmować następujące argumenty:

- nazwa funkcji wejściowej (m-plik),
- nazwa funkcji stanowiącej pochodną funkcji wejściowej (m-plik) – **tylko dla metody stycznych, pkt. 3**,
- przedział poszukiwań miejsca zerowego (**dla metody bisekcji i siecznych, pkt. 1 i 2**) lub punkt startowy (**dla metody stycznych, pkt. 3**)
- dokładność znalezionego rozwiązania.

Zgodnie z powyższym, dla pkt. 1) i 2) przykładowe wywołanie funkcji powinno mieć postać:

$$x0 = mbisekcji('fun2', [21.2, 21.4], 1e-8)$$

dla pkt. 3):

$$x0 = mstycznych('fun2', 'fun2_poch', 21, 1e-8)$$

Uwaga:

Ponieważ do funkcji znajdującej miejsca zerowe (np. *mbisekcji*) przekazywana jest nazwa badanej funkcji w postaci łańcucha tekstowego (np. *'fun2'*) do wyznaczenia jej wartości w danym punkcie (np. $x = 5$) należy skorzystać z polecenia *feval*.

3. Używając skryptów funkcyjnych utworzonych w punkcie 2 znajdź wszystkie miejsca zerowe funkcji:

$$f(x) = x^{1.5} * \sin^3(x) - 5 * (x - 50)$$

w przedziale [40,60]. Przyjmij dokładność szukanego rozwiązania na poziomie 10^{-8} .

Porównaj liczbę iteracji potrzebną do wyznaczenia trzeciego miejsca zerowego (w danym przedziale) powyższej funkcji przez każdy z algorytmów. Dla każdego algorytmu przyjmij tę samą dokładność obliczeń oraz ten sam przedział poszukiwań.

Uwaga:

W celu określenia przedziałów poszukiwań kolejnych miejsc zerowych wykreśl funkcję korzystając z polecenia *fplot*.

4. Wyznacz miejsca zerowe funkcji z punktu 3 korzystając z polecenia *fzero*

Porównaj liczbę iteracji potrzebną do wyznaczenia trzeciego miejsca zerowego funkcji przy użyciu polecenia *fzero* z liczbą iteracji algorytmów opracowanych w punkcie 3.

Uwaga:

W celu wyświetlenia wyników kolejnych iteracji oraz określenia dokładności uzyskanego wyniku na poziomie np. $1e-8$, przy wywołaniu polecenia *fzero* podaj dodatkowy argument postaci:

$$options=optimset('Display','iter','tolfun',1e-8);$$

5. Trajektorię lotu piłki wyrzuconej przez zawodnika można zamodelować parabolą opisaną równaniem:

$$y = x \tan(\theta_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta_0)} x^2 + y_0$$

Znajdź odpowiedni kąt rzutu θ_0 wiedząc, że prędkość początkowa $v_0 = 20$ m/s, a dystans do drugiego zawodnika wynosi 40 m (y_0 jest współrzędną początkowej wysokości piłki). Przyspieszenie ziemskie przyjmij na poziomie $g = 9,81$ m/s². Piłka opuszcza rękę pierwszego gracza na wysokości 1,8 m, a drugi gracz łapie ją na wysokości 1 m.

Znajdź maksymalną wysokość lotu piłki.

Sporządź wykres prezentujący trajektorię lotu piłki.

6. Korzystając z polecenia *fsolve* rozwiąż poniższe układy równań:

$$1. \begin{cases} x_2 = x_1^2 + 1 \\ x_2 = 3 \cos(x_1) \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0 \\ e^{x_1} = \sin(x_2) \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{1 - \operatorname{tg}(x_1)}{1 + \operatorname{tg}(x_1)} = \operatorname{tg}(x_2) \\ x_1 - x_2 = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Określ liczbę iteracji potrzebną do rozwiązania każdego z nich.

Uwaga:

Równania każdego układu powinny zostać zapisane w m-pliku funkcyjnym postaci:

function $y = \text{ukl_rown}(x)$

$y(1) = f11(x(1)) + f12(x(2))$

$y(2) = f21(x(1)) + f22(x(2))$

(argument wejściowy x oraz wyjściowy y są wektorami)

W celu określenia przedziałów poszukiwań rozwiązania (rozwiązań) wykreśl funkcję korzystając z polecenia *ezplot* oraz *inline* (*ezplot* przyjmuje funkcję postaci $f(x,y)$).

7. *) Rozwiąż układy równań z punktu 8 stosując metodę Newtona-Raphsona.

Wartość poszczególnych elementów Jakobianu w żądanym punkcie x_i wyznacz w sposób przybliżony stosując iloraz różnicowy centralny:

$$y'_i = \frac{-y_{i-1} + y_{i+1}}{2h}$$

gdzie:

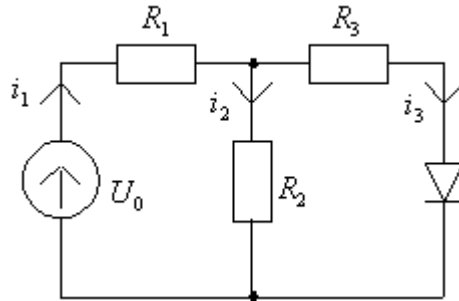
$h = x_{i+1} - x_i$ – krok ilorazu centralnego przybliżającego pochodną

$y_i = f(x_i)$ – wartość funkcji w punkcie x_i

$y'_i = f'(x_i)$ – wartość pochodnej funkcji $f(x)$ w punkcie x

i – indeks numerujący kolejne wartości zmiennych

8. Dla układu elektrycznego pokazanego na rysunku utwórz graf i napisz macierze: incydencji oraz wymuszeń napięciowych. Na tej podstawie, w oparciu o metodę potencjałów węzłowych, sformułuj układ równań nieliniowych wiążący potencjały węzłowe obwodu.



Przyjmij, że charakterystyka diody opisana jest równaniem: $i_d = i_s \left(\exp\left(\frac{u_d}{u_T}\right) - 1 \right)$.

Obliczenia przeprowadź dla: $i_s = 8e-15$ A, $u_T = 0.019$ V, $U_0 = 5$ V, $R_1 = 2$ k Ω , $R_2 = 2$ k Ω , $R_3 = 1$ k Ω .

Korzystając z funkcji fsolve rozwiąż układ równań wyznaczając potencjały węzłowe.

Określ wartości prądów w poszczególnych gałęziach.

Sporządź wykres ukazujący wpływ 10 % zaburzenia wartości rezystora R_3 na wartość prądu i_3